

Cours du 22/10/09: simplification d'une démonstration.

Propriété.

Si f et g sont des éléments de $L^2(\mathbb{R}^n)$ alors elles sont composables pour tout x et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f * g)(x) = 0.$$

Preuve détaillée (dans le cas $n=1$). Pour tout x , la fonction $y \mapsto f(y) g(x - y)$ est intégrable dans $\mathbb{R}^n$ comme produit de deux fonctions dont le carré est intégrable. La fonction

$$x \mapsto (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy$$

est donc définie sur $\mathbb{R}^n$.

On remarque d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $R > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy &= \int_{-\infty}^{-R} f(y)g(x-y)dy + \int_{-R}^R f(y)g(x-y)dy + \int_R^{+\infty} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{J_R} f(y)g(x-y)dy + \int_{-R}^R f(y)g(x-y)dy \end{aligned}$$

en utilisant la notation J_R pour l'ensemble $] -\infty, -R] \cup [R, +\infty[$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le changement de variable $x - y = t$ (entre y et t) on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{J_R} f(y)g(x-y)dy \right| &\leq \sqrt{\int_{J_R} |f(y)|^2 dy} \sqrt{\int_{J_R} |g(x-y)|^2 dy} \\ &\leq \sqrt{\int_{J_R} |f(y)|^2 dy} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|^2 dy} = \sqrt{\int_{J_R} |f(y)|^2 dy} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt} \\ &\leq \|g\|_2 \sqrt{\int_{J_R} |f(y)|^2 dy} \end{aligned}$$

quel que soit x et quel que soit $R > 0$. Cela étant, comme $|f|^2$ est intégrable dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{J_R} |f(y)|^2 dy &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\infty}^{-R} |f(y)|^2 dy + \int_R^{+\infty} |f(y)|^2 dy \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy - \int_{-R}^{+\infty} |f(y)|^2 dy + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy - \int_{-\infty}^R |f(y)|^2 dy \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $R_0 > 0$ tel que

$$\left| \int_{J_{R_0}} f(y)g(x-y)dy \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Reprenons alors l'égalité

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = \int_{J_{R_0}} f(y)g(x-y)dy + \int_{-R_0}^{R_0} f(y)g(x-y)dy.$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la seconde intégrale et le changement de variable $x - y = t$ (entre y et t); on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R_0}^{R_0} f(y)g(x-y)dy \right| &\leq \sqrt{\int_{-R_0}^{R_0} |f(y)|^2 dy} \sqrt{\int_{-R_0}^{R_0} |g(x-y)|^2 dy} \\ &\leq \|f\|_2 \sqrt{\int_{-R_0}^{R_0} |g(x-y)|^2 dy} = \|f\|_2 \sqrt{\int_{x-R_0}^{x+R_0} |g(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

Cela étant, en écrivant

$$\int_{x-R_0}^{x+R_0} |g(t)|^2 dt = \int_{x-R_0}^0 |g(t)|^2 dt + \int_0^{x+R_0} |g(t)|^2 dt = - \int_0^{x-R_0} |g(t)|^2 dt + \int_0^{x+R_0} |g(t)|^2 dt$$

et en utilisant l'intégrabilité de $|g|^2$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-R_0}^{x+R_0} |g(t)|^2 dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(- \int_0^{x-R_0} |g(t)|^2 dt + \int_0^{x+R_0} |g(t)|^2 dt \right) \\ &= - \int_0^{+\infty} |g(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |g(t)|^2 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

On procède de même pour la limite en $-\infty$. Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-R_0}^{R_0} f(y)g(x-y)dy = 0$$

donc qu'il existe $N > 0$ tel que

$$\left| \int_{-R_0}^{R_0} f(y)g(x-y)dy \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout x tel que $|x| \geq N$.

Ainsi, pour tout x tel que $|x| \geq N$, on a

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{J_{R_0}} f(y)g(x-y)dy + \int_{-R_0}^{R_0} f(y)g(x-y)dy \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et on conclut.