Année académique 2012-2013
2e Bac Mathématique

Interrogation du 23 octobre 2012 – Corrigé

Question 1. (1.1) Enoncer et démontrer le résultat principal qui lie la convergence uniforme (d'une suite de fonctions) et la continuité (de sa limite).

(1.2) Comparer les notions de convergence ponctuelle et de convergence uniforme. Justifier.

Solution. Voir cours théorique.

Question 2. (2.1) Pour quelles valeurs du paramètre réel α, la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $]0,1[$?

(2.2) Calculer la valeur de $\Gamma(7/2)$.

(2.3) Montrer que la fonction Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.

Solution. (2.1) Comme la fonction est continue sur $]0,1]$, il ne reste qu'à vérifier l'intégrabilité en 0^+. En prenant $\theta < 1$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} x^\theta \frac{\sin(x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} x^{\theta-\alpha+2}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} x^{\theta-\alpha+2}$$

et cette limite est finie lorsque $\theta-\alpha+2 \geq 0$, c'est-à-dire lorsque $\alpha < 3$. On montre par un calcul similaire que cette fonction n'est pas intégrable pour $\alpha \geq 3$. Ainsi, elle est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 3$.

(2.2) On a

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

(2.3) On sait que $\Gamma \in C_2(]0,+\infty[)$ et on remarque que $D^2\Gamma \geq 0$ sur $]0,+\infty[$ en utilisant la monotonie de l'intégrale. On en déduit que Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.

Question 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{1+mx}{1+m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(3.1) Déterminer l'ensemble A des réels (le plus grand possible) sur lequel cette suite converge ponctuellement ainsi que sa limite.

(3.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A, sur $A\cap]0,+\infty[$ et sur les compacts inclus dans $A\cap]0,+\infty[$.

Solution. (3.1) Cette suite converge ponctuellement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\chi_{\{0\}}$, donc $A = \mathbb{R}$.

(3.2) Comme $f_m \in C_0(\mathbb{R})$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque sa limite $\chi_{\{0\}}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle ne converge pas non plus uniformément sur $]0,+\infty[$ puisque

$$\|f_m - \chi_{\{0\}}\|_{]0,+\infty[} = \sup_{x>0}|f_m(x)| = \sup_{x\geq 0} f_m(x) \geq f_m(0) = 1$$

(car $f_m \in C_0(\mathbb{R})$ et f_m est positif sur $[0,+\infty[$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$). Si K est un compact de $]0,+\infty[$, alors il existe $r > 0$ tel que $K \subset [r,+\infty[$. En étudiant le signe de Df_m ($f_m \in C_1(\mathbb{R})$) et en utilisant la positivité de f_m sur $]0,+\infty[$, on voit que f_m admet un maximum en $(-1+\sqrt{2})/m$.

Dès lors, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $r > (-1+\sqrt{2})/m$ pour tout $m \geq M$. Par conséquent, pour $m \geq M$, f_m est décroissant sur $[r, +\infty[$ et on a

$$\|f_m - \chi_{\{0\}}\|_K \leq \sup_{x \geq r} f_m(x) = f_m(r) = \frac{1+mr}{1+m^2r^2} \to 0$$

si $m \to +\infty$. Ainsi, la suite converge uniformément sur K.

Question 4. Montrer que la fonction

$$S :]0,\pi[\to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^m}\right)$$

est bien définie. Est-elle continue ? Justifier.

Solution. Si on note $f_m(x)$ le terme général de la série, on remarque que $f_m(x)$ est bien défini pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $x \in]0,\pi[$. De plus, $2^{-m}x \in]0,\pi/4[$ et donc $|f_m(x)| < 2^{-m}$ pour tous $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $x \in]0,\pi[$. On en déduit par le critère de comparaison que la série converge car 2^{-m} est le terme général d'une série géométrique convergente. Donc, S est bien défini sur $]0,\pi[$. Pour obtenir la continuité de S sur $]0,\pi[$, il suffit de montrer que la série converge uniformément sur $]0,\pi[$ (ou sur tout compact de $]0,\pi[$) puisque $f_m \in \mathrm{C}_0(]0,\pi[)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Utilisons le critère de Cauchy. Soient $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $q \geq p$. On a

$$\left\| \sum_{m=p}^{q} f_m \right\|_{]0,\pi[} \leq \sum_{m=p}^{q} \sup_{x \in]0,\pi[} 2^{-m} |\operatorname{tg}(2^{-m}x)| \leq \sum_{m=p}^{q} 2^{-m} \to 0$$

si $p, q \to +\infty$ vu que la dernière expression est un tronçon de Cauchy d'une série géométrique convergente.