

**Interrogation du 23 octobre 2012**

- ▶ L'interrogation dure 2 heures.
- ▶ Indiquer sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom.
- ▶ Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- ▶ **Justifier toutes vos réponses.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

**Question 1.** (1.1) Énoncer et démontrer le résultat principal qui lie la convergence uniforme (d'une suite de fonctions) et la continuité (de sa limite).

(1.2) Comparer les notions de convergence ponctuelle et de convergence uniforme. Justifier.

**Question 2.** (2.1) Pour quelles valeurs du paramètre réel  $\alpha$ , la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^\alpha}$$

est-elle intégrable sur  $]0, 1[$  ?

(2.2) Calculer la valeur de  $\Gamma(7/2)$ .

(2.3) Montrer que la fonction  $\Gamma$  est convexe sur  $]0, +\infty[$ .

**Question 3.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ , on pose

$$f_m(x) = \frac{1 + mx}{1 + m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3.1) Déterminer l'ensemble  $A$  des réels (le plus grand possible) sur lequel cette suite converge ponctuellement ainsi que sa limite.

(3.2) Étudier la convergence uniforme de cette suite sur  $A$ , sur  $A \cap ]0, +\infty[$  et sur les compacts inclus dans  $A \cap ]0, +\infty[$ .

**Question 4.** Montrer que la fonction

$$S : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2^m} \right)$$

est bien définie. Est-elle continue ? Justifier.