Analyse II, partie 1

Année académique 2013-2014
2$^{\text{e}}$ Bac Mathématique

Interrogation du 22 octobre 2013 (Corrigé)

Total /30

Question 1. (1.1) Enoncer et démontrer le résultat principal qui lie la convergence uniforme (d'une suite de fonctions) et la continuité (de sa limite). */7*

(1.2) Montrer que, dans l'espace $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$, toute suite convergente est de Cauchy. */2*

(1.3) Si une suite de fonctions converge dans $\mathrm{L}^2([0,1])$, converge-t-elle aussi dans $\mathrm{L}^1([0,1])$ vers la même limite ? La réciproque est-elle vraie ? */4*

Solution. (1.1) & (1.2) Voir cours.
(1.3) La propriété est vraie puisque

$$\mathrm{L}^2([0,1]) \subset \mathrm{L}^1([0,1]) \quad \text{et} \quad \|g\|_{\mathrm{L}^1([0,1])} \leq \|g\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} \ \forall g \in \mathrm{L}^2([0,1]).$$

En effet, si $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ vers f, alors

$$\|f_m - f\|_{\mathrm{L}^1([0,1])} \leq \|f_m - f\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} \to 0$$

si $m \to +\infty$. La réciproque est fausse en prenant par exemple la suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de terme général

$$f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{mx}}, \quad x \in]0,1].$$

En effet, cette suite converge dans $\mathrm{L}^1([0,1])$ vers 0. Par contre, la convergence dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ n'a pas de sens puisque $f_m \notin \mathrm{L}^2([0,1])$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

Question 2. (2.1) Pour quelles valeurs des réels α et β les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto (1-x)^\beta$ sont-elles de carré intégrable sur $]0,1[$? Montrer l'inégalité

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1) \leq \frac{1}{\sqrt{(1+2\alpha)(1+2\beta)}}.$$

/2

(2.2) Montrer que la fonction Γ est convexe sur $]0,+\infty[$. */2*

Solution. (2.1) La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de carré intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > -1/2$ et la fonction $x \mapsto (1-x)^\beta$ est de carré intégrable sur $[0,1[$ si et seulement si $\beta > -1/2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1) = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,dx \leq \sqrt{\int_0^1 x^{2\alpha}\,dx}\sqrt{\int_0^1 (1-x)^{2\beta}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{(1+2\alpha)(1+2\beta)}}.$$

(2.2) Nous savons que $\Gamma \in \mathrm{C}_2(]0,+\infty[)$ et nous remarquons que $D^2\Gamma \geq 0$ sur $]0,+\infty[$ en utilisant la monotonie de l'intégrale. Nous en déduisons que Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.

Question 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \sqrt{m}\,e^{mx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3.1) Sur quel intervalle I (le plus grand possible) la suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge-t-elle ponctuellement ? */1,5*

(3.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur I et sur les compacts de I. */3,5*

(3.3) Etudier la convergence dans $\mathrm{L}^1(I)$ et dans $\mathrm{L}^2(I)$ de cette suite. */4*

(3.4) Sur quel intervalle J (le plus grand possible) la fonction

$$S = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f_m}{m^2+1}$$

est-elle définie ? Y est-elle continue ?

Solution. (3.1) Nous avons

$$\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et donc la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur $I =]-\infty, 0[$ vers la fonction 0.

(3.2) La fonction f_m étant continue, positive et croissante sur $]-\infty, 0]$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, nous obtenons

$$\|f_m - 0\|_I = \sup_{x<0} f_m(x) = f_m(0) = \sqrt{m} \to +\infty$$

si $m \to +\infty$ et donc la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ne converge pas uniformément sur I. Si K est un compact de I, alors il existe $r < 0$ tel que $K \subset]-\infty, r]$. Vu les propriétés de f_m, nous avons

$$\|f_m - 0\|_K \leq \sup_{x\leq r} f_m(x) = f_m(r) = \sqrt{m}\, e^{mr} \to 0$$

si $m \to +\infty$ et donc la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur K vers la fonction 0.

(3.3) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction f_m est clairement intégrable et de carré intégrable sur I. Nous avons

$$\|f_m - 0\|_{\mathrm{L}^1(I)} = \sqrt{m} \int_{-\infty}^{0} e^{mx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{m}} \to 0$$

et

$$\|f_m - 0\|_{\mathrm{L}^2(I)} = \sqrt{m \int_{-\infty}^{0} e^{2mx}\, dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si $m \to +\infty$. Par conséquent, la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge dans $\mathrm{L}^1(I)$ vers la fonction 0, mais ne converge pas dans $\mathrm{L}^2(I)$.

(3.4) La fonction S est définie sur $J =]-\infty, 0]$. En effet, le terme général $a_m(x)$ de la série ne tend pas vers 0 si $x > 0$ et donc, la série diverge. Si $x \leq 0$, alors $|a_m(x)| \leq 1/m^{3/2}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et donc la série converge par le critère de comparaison (puisque $1/m^{3/2}$ est le terme général de la série de Riemann d'ordre $3/2$ qui est convergente). Pour obtenir la continuité de S sur J, il suffit de montrer que la série converge uniformément sur J (ou sur tout compact de J) puisque $a_m \in \mathrm{C}_0(J)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Utilisons pour ce faire le critère de Cauchy. Soient $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $q \geq p$. Nous avons

$$\left\| \sum_{m=p}^{q} a_m \right\|_J \leq \sum_{m=p}^{q} \sup_{x\leq 0} \left| \frac{\sqrt{m}}{m^2+1}\, e^{mx} \right| \leq \sum_{m=p}^{q} \frac{1}{m^{3/2}} \to 0$$

si $p, q \to +\infty$ vu que la dernière expression est un tronçon de Cauchy de la série de Riemann d'ordre $3/2$ qui est convergente. Ainsi, S est continu sur J.