1. Intégrales eulériennes

Exercice 1. Calculer si possible les limites

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m)\right).$$

Exercice 2. Exprimer $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

Exercice 3. Etablir que pour tous $m > 0, n > -1, a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) a^{-\frac{n+1}{m}}.$$

Exercice 4. Pour tout $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x}.$$

Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

Exercice 5. Montrer que la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)}.$$

En déduire que $\omega_n(r) \to 0$ si $n \to +\infty$.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 6 (Définition de Gauss de Γ). Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{m\to+\infty} \frac{m^x\, m!}{x(x+1)\dots(x+m)}.$$