

2. Convergences ponctuelle et uniforme

Exercice 1. Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme (sur \mathbb{R}) des suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions de terme général égal à :

$$(a) f_m = \chi_{[-m, m]} \quad (b) f_m = m\chi_{[-m, m]} \quad (c) f_m = m\chi_{[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]}$$

Exercice 2. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{m^2 x}{1 + m^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} , sur $]0, +\infty[$, et sur les compacts de $]0, +\infty[$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{x}{m}\chi_{[0, m]}(x) + (m+1-x)\chi_{]m, m+1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur \mathbb{R} ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur \mathbb{R} et sur les intervalles $] -\infty, r]$ avec $r > 0$.

Exercice 3. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$ de \mathbb{R} . Si cette suite converge uniformément vers la fonction f sur $]a, b[$, montrer que f est intégrable sur $]a, b[$ et que

$$\int_a^b f_m(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

si $m \rightarrow +\infty$.

Exercice 4. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ la suite de fonctions définies par $f_m(x) = (1 - x^2)^m$, $x \in [0, 1]$.

- (a) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0, 1]$.
 (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[0, 1]$ et sur les sous-intervalles de $[0, 1]$.
 (c) Calculer la limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^m dx.$$

Exercice 5. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ en série de puissances entières de x .

Exercice 6. Posons

$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m^2}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de cette série.
 (b) Où la fonction S est-elle définie, continue et dérivable ?
 (c) Etablir qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$S(x) + S(1 - x) = a - \ln(x) \ln(1 - x)$$

pour tout $x \in]0, 1[$.

(d) Montrer que

$$a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Exercice 7. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2 m} x^m \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-m} dt \right) x^m.$$

Exercice 8 (Fonction ζ de Riemann). Soit la fonction ζ (d'une variable réelle) définie par

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de cette série.
- (b) Quel est le domaine de définition I de ζ ? A-t-on $\zeta \in C_0(I)$? Et $\zeta \in C_1(I)$? Et aussi $\zeta \in C_\infty(I)$?
- (c) Calculer si possible les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x).$$

- (d) Etudier la croissance/décroissance et la convexité/concavité de ζ sur I .
- (e) Esquisser le graphique de ζ dans un repère orthonormé.