

**3. Espaces  $L^1(E)$ ,  $L^2(E)$  et  $L^\infty(E)$** 

**Exercice 1.** (a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ , établir que la fonction  $x \mapsto \sin(kx)$  appartient à  $L^1([0, 2\pi])$ ,  $L^2([0, 2\pi])$  et  $L^\infty([0, 2\pi])$ , mais que ses normes dans ces espaces sont différentes.

(b) Déterminer la norme  $\|\chi_{\mathbb{Q}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ .

(c) Donner un exemple de fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  dont la norme est 1.

**Exercice 2.** On définit les fonctions  $f$  et  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(2\pi x).$$

(a) Déterminer si possible les normes de  $f$  et  $g$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  et  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

(b) Même question pour  $g$  dans  $L^1([0, 1])$ ,  $L^2([0, 1])$  et  $L^\infty([0, 1])$ .

(c) Calculer si possible le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  des fonctions  $ifg$  et  $if$ .

**Exercice 3.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ , on pose

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \chi_{[-m, m]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ , déterminer à quels espaces  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $L^\infty(\mathbb{R})$  appartient la fonction  $f_m$  et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  sur  $\mathbb{R}$ .

(c) Etudier la convergence de la suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  dans chacun des espaces  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  et  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Exercice 4.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ , on pose

$$f_m(x) = m^{3/2} x e^{-mx}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

(a) Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ , déterminer à quels espaces  $L^1([0, +\infty[)$ ,  $L^2([0, +\infty[)$ ,  $L^\infty([0, +\infty[)$  appartient la fonction  $f_m$  et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  sur  $[0, +\infty[$ .

(c) Etudier la convergence de la suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  dans chacun des espaces  $L^1([0, +\infty[)$ ,  $L^2([0, +\infty[)$  et  $L^\infty([0, +\infty[)$ .

**Exercice 5.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on pose

$$f_m(x) = e^{-2x} \frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer (si possible) la norme de  $f_m$  dans  $L^1([0, +\infty[)$ ,  $L^2([0, +\infty[)$  et  $L^\infty([0, +\infty[)$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

(b) Pour tout  $M \in \mathbb{N}$ , on pose

$$F_M = \sum_{m=0}^M f_m.$$

(1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite  $(F_M)_{M \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, +\infty[$  ainsi que la convergence uniforme sur  $[0, +\infty[$  et sur tout compact de  $[0, +\infty[$ .

(2) Etudier la convergence de la suite  $(F_M)_{M \in \mathbb{N}}$  dans  $L^1([0, +\infty[)$  et  $L^2([0, +\infty[)$ .

**Exercice 6.** Comparer les espaces  $L^1([-1, 1])$ ,  $L^2([-1, 1])$  et  $L^\infty([-1, 1])$  vis-à-vis de l'inclusion. Comparer également les normes (en termes d'inégalités entre celles-ci).

**Exercice 7.** Montrer que, pour tous  $x, y > 0$ , on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

**Exercice 8.** Soit  $E$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$ .

- (a) Si  $f_m \rightarrow f$  dans  $L^1(E)$  et  $g_m \rightarrow g$  dans  $L^\infty(E)$ , montrer que  $f_m g_m \rightarrow fg$  dans  $L^1(E)$ .
- (b) Si  $f_m \rightarrow f$  dans  $L^2(E)$  et  $g_m \rightarrow g$  dans  $L^2(E)$ , montrer que  $f_m g_m \rightarrow fg$  dans  $L^1(E)$ .

**Exercice 9.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Si  $f \in C_0([a, b]) \cap C_1(]a, b[)$  et si  $Df \in L^2(]a, b[)$ , démontrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b - a) \|Df\|_{L^2(]a, b[)}^2.$$

**Exercice 10.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur  $\mathbb{R}$  de la suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .
- (b) Les fonctions  $\delta_n$  sont-elles dans  $L^1(\mathbb{R})$ , dans  $L^2(\mathbb{R})$  et/ou dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ ? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite dans les espaces auxquels les fonctions appartiennent.
- (c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1.$$

- (d) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  (i.e. pour tout  $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R})$  à support compact dans  $\mathbb{R}$ ).

**Exercice 11.** Soient  $E$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$  et  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions qui converge *pp* sur  $E$  vers la fonction  $f$ . Montrer que si  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^p(E)$  avec  $p \in \{1, 2, \infty\}$ , alors sa limite dans  $L^p(E)$  est encore  $f$ .