

5. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Exercice 1. Soient $a > 0$. En tout point $y \in \mathbb{R}$, calculer si possible

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^{\pm} \left(e^{ix} e^{-|x|} \right), \quad \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^{\pm} \left((1 - a|x|) \chi_{[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]}(x) \right), \quad \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^{\pm} \left(e^{-|x-1|} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^{\pm} \left(\sin(2x) \chi_{[-1,1]}(x) \right).$$

Exercice 2. (a) Calculer (si possible) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) où λ est une constante strictement positive.

(b) Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$R_{\lambda}(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a $R_a \star R_b = R_{a+b}$.

(c) En déduire que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab} \frac{1}{a + b}.$$

Exercice 3. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 4. Soient $a, b > 0$. Si possible, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{-+\infty} \frac{\sin(ax) \cos(bx)}{x} dx.$$

Si en particulier $a > b$, calculer

$$\int_0^{-+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x} dx.$$

Exercice 5. En utilisant le théorème du transfert, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x) dx.$$

Exercice 6. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x-t)} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = |\mathcal{F}_y^- f|^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'autocorrélation s'écrit $E_f = f \star f^s$.

(b) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

(c) Montrer que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

(d) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

Exercice 7 (Equation de la chaleur). Soit une fonction $u \in C_2(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$ telle que, pour tout $t \geq 0$, les fonctions $x \mapsto u(x, t)$, $x \mapsto D_x u(x, t)$ et $x \mapsto D_x^2 u(x, t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $U_1, U_2 \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $|u(x, t)| \leq U_1(x)$ et $|D_t u(x, t)| \leq U_2(x)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Soit v une constante strictement positive. On suppose que u vérifie l'équation de la chaleur

$$D_t u(x, t) = v^2 D_x^2 u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

On pose

$$f(x) = u(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}$$

et on définit la fonction F de telle sorte que, pour tout $t \geq 0$, $F(y, t)$ est la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x, t)$.

(a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(y, t)$ vérifie

$$D_t F(y, t) + v^2 y^2 F(y, t) = 0.$$

(b) En déduire que, pour $y \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$F(y, t) = e^{-v^2 y^2 t} \mathcal{F}_y^- f.$$

(c) En déduire finalement que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2v\sqrt{t}y) e^{-y^2} dy.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 8. Démontrer que, dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, 0 est le seul élément tel que $f \star f = f$.

Exercice 9. Montrer que la transformation de Fourier (dans $L^1(\mathbb{R}^n)$) est un opérateur injectif, mais pas surjectif.