

Travail dirigé 1

Exercice 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- (a) La fonction $x \mapsto e^{-i\pi x^2}$ appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R})$.
- (b) Si celui-ci existe, le produit de convolution de deux fonctions impaires est impair.
- (c) Si une suite de fonctions converge dans $L^2([0, 1])$, elle converge aussi dans $L^1([0, 1])$.
- (d) Il existe une fonction (non identiquement nulle) appartenant à $L^\infty([0, 1])$ telle que ses normes dans $L^1([0, 1])$, $L^2([0, 1])$ et $L^\infty([0, 1])$ sont égales.

Exercice 2. (a) Calculer la valeur de $\Gamma(7/2)$ et de $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

- (b) Pour quelles valeurs des réels α et β les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto (1-x)^\beta$ sont-elles de carré intégrable sur $]0, 1[$? Montrer l'inégalité

$$B(\alpha + 1, \beta + 1) \leq \frac{1}{\sqrt{(1 + 2\alpha)(1 + 2\beta)}}.$$

- (c) Montrer que la fonction Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \sqrt{1 - nx} & \text{si } x \in [0, 1/n[\\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sur $[-1, 1]$.
- (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[-1, 1]$, sur $[-1, 0]$, sur $]0, 1]$ et sur les fermés bornés inclus dans $]0, 1]$.
- (c) Etudier la convergence de cette suite dans $L^1([-1, 1])$ et $L^2([-1, 1])$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n \frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge-t-elle (1) ponctuellement sur $\mathbb{R}$, (2) uniformément sur $\mathbb{R}$, (3) uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_0$, (4) dans $L^1(\mathbb{R})$, (5) dans $L^2(\mathbb{R})$?
- (b) Dans la suite, on suppose que $\alpha = 1$.

- (1) Montrer que la fonction

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_0$.

- (2) Calculer $S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$. En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.

Exercice 5. La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne d'écart-type $\sigma > 0$ est donnée par la fonction G_σ définie par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x G_\sigma(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 G_\sigma(x) dx = \sigma^2.$$

- (b) Pour tous $\sigma, \tau > 0$, établir que $G_\sigma \star G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (a) Montrer que le produit de convolution $f \star f$ est défini sur $\mathbb{R}$ et déterminer son expression en tout point de $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $(f \star f)(\frac{\pi}{2})$.
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on pose $\Psi_n = f \star \dots \star f$ (produit de convolution composé de n facteurs f). Si on note $[f]$ le support de f , montrer que Ψ_n est nul en dehors de $n[f]$.
- (c) Calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_n(x) dx.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 7. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si $f_m \rightarrow f$ dans $L^2(E)$ et $g_m \rightarrow g$ dans $L^\infty(E)$, montrer que $f_m g_m \rightarrow fg$ dans $L^2(E)$.

Exercice 8. Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est tel que¹ $f \star f^* = 0$, alors $f = 0$ presque partout.

1. Pour rappel, on note $f^*(x) = \overline{f(-x)}$.