Année académique 2014-2015
2^{e} Bac Mathématique et Physique

Travail dirigé 1 – Solutions

Solution de l'exercice 1. (a) Faux, cette fonction n'est pas de carré intégrable en l'infini. (b) Faux, il est pair. (c) Vrai, on a en effet $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ et $\|f\|_{L^1([0,1])} \leq \|f\|_{L^2([0,1])}$ pour tout $f \in L^2([0,1])$. (d) Vrai, $\chi_{[0,1]}$ par exemple convient.

Solution de l'exercice 2. (a) $\Gamma(7/2) = 15\sqrt{\pi}/8$ et $B(1/2, 3/2) = \pi/2$. (b) La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de carré intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $\alpha > -1/2$. La fonction $x \mapsto (1-x)^\beta$ est de carré intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $\beta > -1/2$. (c) /

Solution de l'exercice 3. (a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur $[-1,1]$ vers la fonction $\chi_{[-1,0]}$. (b) Cette suite converge uniformément sur $[-1,0]$ et sur les fermés bornés de $]0,1]$ vers cette même fonction. Par contre, la convergence uniforme n'a lieu ni sur $[-1,1]$, ni sur $]0,1]$. (c) Cette suite converge dans $L^1([-1,1])$ et dans $L^2([-1,1])$ vers $\chi_{[-1,0]}$.

Solution de l'exercice 4. (a) (1) $\alpha \in \mathbb{R}$, (2) $\alpha < 1/2$, (3) $\alpha \in \mathbb{R}$, (4) $\alpha < 1$, (5) $\alpha < 3/4$. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_0$, on a

$$S(x) = \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{(1-e^{-\frac{x^2}{2}})^2}.$$

Solution de l'exercice 5. /

Solution de l'exercice 6. (a) On a

$$(f \star f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((\pi + x)\cos(x) - \sin(x)\right) & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}\left((\pi - x)\cos(x) + \sin(x)\right) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $(f \star f)(\pi/2) = 1/2$. (b) Le support de Ψ_n est inclus dans $n[-\pi/2, \pi/2]$. (c) L'intégrale vaut 2^n.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Solution de l'exercice 7. /

Solution de l'exercice 8. /

Solution de l'exercice 9. (a) /. (b) L'intégrale fléchée vaut $\pi/2$.