

Travail dirigé 2

Exercice 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Il existe une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(b) Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors f est borné (presque partout) sur $\mathbb{R}$.

(c) Le produit d'une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ par sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient les fonctions f , g et h définies presque partout sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = i\pi \sin(x) \chi_{[-\pi, \pi]}(x), \quad g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1}.$$

Déterminer si possible la transformée de Fourier de ces fonctions. Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{x(x^2 + a^2)} dx.$$

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a > 0$. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) A-t-on $f \in L^1(\mathbb{R})$? Et $f \in L^2(\mathbb{R})$?

(b) Déterminer si possible la transformée de Fourier de Df .

(c) En déduire si possible la transformée de Fourier de f .

Exercice 5. Soit la fonction impaire f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$.

(a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^6}.$$

Exercice 6. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1 + m^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer l'ensemble A des réels sur lequel cette suite converge ponctuellement ainsi que sa limite.

(b) Étudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les fermés bornés inclus dans A .

(c) Étudier la convergence de cette suite dans $L^1(A)$ et $L^2(A)$.

Exercice 7. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{cx} \chi_{[0, +\infty[}(x)$ où c est un paramètre complexe.

(a) Déterminer si possible le produit de convolution $f \star f$ en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Pour quelles valeurs complexes de c la fonction $f \star f$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Justifier.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 8. Soit $f \in C_1([0, 2\pi])$ une fonction à valeurs réelles telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

(a) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \leq \int_0^{2\pi} (Df(t))^2 dt.$$

(b) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $f = a \cos + b \sin$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Pour tout $t > 0$, on pose $f_t(x) = x^{t-1} e^{-x} \chi_{]0, +\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Pour tout $t > 0$, montrer que la fonction $F_t = \mathcal{F}^- f_t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$D_\xi F_t(\xi) + \frac{it}{1+i\xi} F_t(\xi) = 0.$$

(b) En déduire que, pour tout $t > 0$, on a

$$F_t(\xi) = \Gamma(t) \exp \left(-t \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \xi^2) + i \operatorname{arctg}(\xi) \right) \right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(c) Montrer que, pour tous $s, t > 0$, on a

$$\frac{f_s}{\Gamma(s)} \star \frac{f_t}{\Gamma(t)} = \frac{f_{s+t}}{\Gamma(s+t)}$$

presque partout sur $\mathbb{R}$.