Analyse II, partie 1

Année académique 2014-2015
2^e Bac Mathématique et Physique

Test de rentrée

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ l'équation
$$2\cos^2(x) = 5\sin(x) - 1.$$

Exercice 2. (a) Soit a un paramètre réel. Etudier la convergence des suites numériques $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de terme général x_m égal à

$$(1)\ x_m = \sqrt[m]{m^2} \qquad (2)\ x_m = \sqrt{m}\left(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}\right) \qquad (3)\ x_m = e^{-am^2} \qquad (4)\ x_m = \frac{(m!)^2}{(2m)!}$$

(b) Déterminer si les séries suivantes convergent et déterminer la somme des séries convergentes :
$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]^m, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{m!}{m^2}.$$

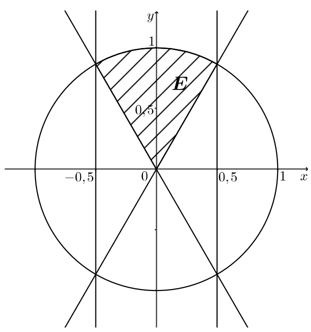
Exercice 3. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2(x)} \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/4}\sin(x)\cos(3x)\,dx \qquad \text{(c)} \int_0^1 \exp(-i\pi x)\,dx$$
$$\text{(d)} \int_{-\infty}^0 e^{ix}\,dx \qquad \text{(e)} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$$

Exercice 4. (a) Calculer si possible l'intégrale double
$$\int_0^1\left(\int_{\sqrt[6]{y}}^1\sqrt{\frac{1+x^4}{y}}\,dx\right)dy.$$

(b) Si A est la région bornée du premier quadrant comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la parabole d'équation $y = x^2$, calculer si possible l'intégrale double
$$\iint_A \frac{dxdy}{xy}.$$

(c) Calculer si possible l'intégrale double
$$\iint_E y\,e^x\,dxdy$$
où E est l'ensemble hachuré dans la représentation graphique ci-dessous.



L. Simons & F. Bastin – 9 septembre 2014