Analyse II, partie 1

Année académique 2015-2016
2e Bloc Mathématique et Physique

3. Espaces normés et convergences liés à l'intégration

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = sin^2(x)$. Calculer si possible les normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ de f

Exercice 2. On définit les fonctions f et g sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = e^{ix} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{-ix}.$$

(a) Déterminer si possible les normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ de f et g.

(b) Calculer $\langle f, 2ig\rangle$.

(c) Prouver que $f + ig$ et $g + if$ sont orthogonaux.

Exercice 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^{3/2} x e^{-mx}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction f_m est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $[0, +\infty[$.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = e^{-2x} \frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer (si possible), pour tout $m \in \mathbb{N}$, les normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ de f_m sur $[0, +\infty[$.

(b) Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_M = \sum_{m=0}^{M} f_m.$$

(1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(F_M)_{M\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$ ainsi que la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ et sur tout compact de $[0, +\infty[$.

(2) Etudier la convergence de la suite $(F_M)_{M\in\mathbb{N}}$ pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5. Soit $\langle ., .\rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe et $\|.\|$ sa norme associée. Démontrer que l'on a les égalités suivantes :

(a) $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{\|f+g\|^2+\|f-g\|^2}{2}$.

(b) $\langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle = \frac{\|f+g\|^2-\|f-g\|^2}{2}$.

(c) $\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|f + i^k g\|^2$.

Exercice 6. Montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 7. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

(a) Si $f_m \to f$ pour $\|.\|_1$ et $g_m \to g$ pour $\|.\|_\infty$, montrer que $f_m g_m \to fg$ pour $\|.\|_1$.

(b) Si $f_m \to f$ pour $\|.\|_2$ et $g_m \to g$ pour $\|.\|_2$, montrer que $f_m g_m \to fg$ pour $\|.\|_1$.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f \in \mathrm{C}_0([a,b]) \cap \mathrm{C}_1(]a,b[)$ et si Df est continue et de carré intégrable sur $]a,b[$, démontrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b-a)\|Df\|_2^2.$$

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Les fonctions δ_n sont-elles continues, intégrables, de carré intégrable, bornées sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite pour les normes correspondantes.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\, dx = 1.$$

(d) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (i.e. pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}$).

Exercice 10. Soient $r > 0$ et f une fonction continue et de carré intégrable sur $]0,r[$. Démontrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

Si f est continue et de carré intégrable sur $]0,+\infty[$, démontrer alors que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$