Analyse II, partie 1

Année académique 2015-2016
2^e Bloc Mathématique et Physique

Travail dirigé 1

Exercice 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) La fonction $x \mapsto e^{-i\pi x^2}$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Si celui-ci existe, le produit de convolution de deux fonctions impaires est impair.

(c) Si une suite de fonctions converge sur $[0,1]$ pour la norme $||.||_2$, elle converge aussi sur $[0,1]$ pour la norme $||.||_1$.

(d) Il existe une fonction bornée (non identiquement nulle) sur $[0,1]$ dont les normes $||.||_1, ||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont égales.

Exercice 2. (a) Calculer la valeur de $\Gamma(7/2)$ et de $\mathrm{B}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

(b) Pour quelles valeurs des réels α et β les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto (1-x)^\beta$ sont-elles de carré intégrable sur $]0,1[$? Pour ces valeurs, montrer l'inégalité

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1) \leq \frac{1}{\sqrt{(1+2\alpha)(1+2\beta)}}.$$

(c) Montrer que la fonction Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,0[\\ \sqrt{1-nx} & \text{si } x \in [0,1/n[\\ 0 & \text{si } x \in [1/n,1] \end{cases}.$$

(a) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sur $[-1,1]$.

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[-1,1]$, sur $[-1,0]$, sur $]0,1]$ et sur les fermés bornés inclus dans $]0,1]$.

(c) Etudier la convergence de cette suite sur $[-1,1]$ pour les normes $||.||_1$ et $||.||_2$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = n^\alpha x\, e^{-n\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge-t-elle (1) ponctuellement sur $\mathbb{R}$, (2) uniformément sur $\mathbb{R}$, (3) uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_0$, (4) sur $\mathbb{R}$ pour $||.||_1$, (5) sur $\mathbb{R}$ pour $||.||_2$?

(b) Dans la suite, on suppose que $\alpha = 1$.

  (1) Montrer que la fonction
  $$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$
  est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_0$.

  (2) Calculer $S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$. En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.

Exercice 5. La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne d'écart-type $\sigma > 0$ est donnée par la fonction G_σ définie par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(x)\,dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x\,G_\sigma(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 G_\sigma(x)\,dx = \sigma^2.$$

(b) Pour tous $\sigma, \tau > 0$, établir que $G_\sigma \star G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(a) Montrer que le produit de convolution $f \star f$ est défini sur $\mathbb{R}$ et déterminer son expression en tout point de $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $(f \star f)(\frac{\pi}{2})$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on pose $\Psi_n = f \star \ldots \star f$ (produit de convolution composé de n facteurs f). Si on note $[f]$ le support de f, montrer que Ψ_n est nul en dehors de $n[f]$.

(c) Calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_n(x)\, dx.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 7. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si $f_m \to f$ sur E pour $||.||_2$ et $g_m \to g$ sur E pour $||.||_\infty$, montrer que $f_m g_m \to fg$ sur E pour $||.||_2$.

Exercice 8. (a) Montrer si possible que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2m+1)x)}{\sin(x)}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Suggestion. Pour calculer cette intégrale, montrer au préalable la formule

$$\sum_{k=-m}^{m} e^{2ikx} = \frac{\sin((2m+1)x)}{\sin(x)}$$

pour tous $x \in]0, \pi/2[$ et $m \in \mathbb{N}_0$.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale fléchée

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

F. Bastin & C. Dubussy – 26 octobre 2015