

**Travail dirigé 2****Exercice 1.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.(a) Il existe une fonction  $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(b) Si  $f$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  telle que sa transformée de Fourier est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  est borné (presque partout) sur  $\mathbb{R}$ .(c) Le produit d'une fonction de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$  par sa transformée de Fourier est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .**Exercice 2.** Soient les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies explicitement par

$$f(x) = i\pi \sin(x) \chi_{[-\pi, \pi]}(x), \quad g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1}.$$

Montrer que  $f$  est continu sur  $\mathbb{R}$  et que  $g$  et  $h$  se prolongent continûment sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer si possible la transformée de Fourier de ces fonctions. Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier de fonction intégrable ou de fonction de carré intégrable.**Exercice 3.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}_0$ , calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{x(x^2 + a^2)} dx.$$

**Exercice 4.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $b > a > 0$ . Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) La fonction  $f$  est-elle intégrable ? De carré intégrable ?(b) Déterminer si possible la transformée de Fourier de  $Df$ .(c) En déduire si possible la transformée de Fourier de  $f$ .**Exercice 5.** Soit la fonction impaire  $f$  définie sur  $[-\pi, \pi]$  par  $f(x) = x(\pi - x)$  si  $x \in [0, \pi]$ .(a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier sur  $[-\pi, \pi]$ . Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^6}.$$

**Exercice 6.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ , on pose

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1 + m^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer l'ensemble  $A$  des réels sur lequel cette suite converge ponctuellement ainsi que sa limite.(b) Étudier la convergence uniforme de cette suite sur  $A$  et sur les fermés bornés inclus dans  $A$ .(c) Étudier la convergence de cette suite sur  $A$  pour les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ .**Exercice 7.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{cx} \chi_{]0, +\infty[}(x)$  où  $c$  est un paramètre complexe.(a) Déterminer si possible le produit de convolution  $f \star f$  en tout point de  $\mathbb{R}$ .(b) Pour quelles valeurs complexes de  $c$  la fonction  $f \star f$  est-elle intégrable sur  $\mathbb{R}$  ? Justifier.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

**Exercice 8.** Soit  $f \in C_1([0, 2\pi])$  une fonction à valeurs réelles telle que  $f(0) = f(2\pi)$  et  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ .

(a) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \leq \int_0^{2\pi} (Df(t))^2 dt.$$

(b) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si  $f = a \cos + b \sin$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 9.** Pour tout  $t > 0$ , on pose  $f_t(x) = x^{t-1} e^{-x} \chi_{]0, +\infty[}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Pour tout  $t > 0$ , montrer que la fonction  $F_t = \mathcal{F}^- f_t$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifie sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$D_\xi F_t(\xi) + \frac{it}{1+i\xi} F_t(\xi) = 0.$$

(b) En déduire que, pour tout  $t > 0$ , on a

$$F_t(\xi) = \Gamma(t) \exp \left( -t \left( \frac{1}{2} \ln(1 + \xi^2) + i \operatorname{arctg}(\xi) \right) \right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(c) Montrer que, pour tous  $s, t > 0$ , on a

$$\frac{f_s}{\Gamma(s)} \star \frac{f_t}{\Gamma(t)} = \frac{f_{s+t}}{\Gamma(s+t)}$$

presque partout sur  $\mathbb{R}$ .