Exercice. Voici ci-dessous l'énoncé d'un exercice ainsi que la solution proposée par un étudiant. Repérer et corriger toutes les erreurs faites par l'étudiant. Expliquer et justifier en quoi ce sont des erreurs.

L. Simons & F. Bastin – 24 octobre 2013

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{mx}{1+m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}$ et sur les bornés fermés de $]0,+\infty[$.

(c) Etudier la convergence de cette suite dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

(a) $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{mx} = 0$

Donc, $f_m \xrightarrow[\mathbb{R}]{} 0$

(b) • On a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - 0| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{mx}{1+m^2x^2} \right|$

Or, $Df_m(x) = \frac{(1+m^2x^2)m - mx\,2m^2x^2}{(1+m^2x^2)^2} = \frac{m(1-m^2x^2)}{(1+m^2x^2)^2}$

et $Df_m(x) = 0 \Leftrightarrow m^2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}$

Dons, $\|f_m\|_{\mathbb{R}} = f_m\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0$ si $m \to +\infty$ et $f_m \not\xrightarrow[\mathbb{R}]{}$.

• Regardons sur les fermés bornés de $]0,+\infty[$.

Soit $M \in \mathbb{N}_0$. Alors $\exists r>0$ tq. $r > \frac{1}{m}$ $\forall m \geq M$. Dans ces conditions,

$\lim\limits_{m\to+\infty} \sup\limits_{x\geq r} |f_m(x)| = \lim\limits_{m\to+\infty} |f_m(r)| = 0$

D'où $f_m \underset{[r;+\infty[}{\rightrightarrows} 0$.

(c) • $f_m(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} x|f_m(x)| = \frac{1}{m} \neq 0$

Donc, $f_m \notin L^1(\mathbb{R})$

• $f_m^2(x) = \frac{m^2x^2}{(1+m^2x^2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$f_m^2 \in L^1(\mathbb{R})$ car $f_m^2 \in C_0(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{3/2} |f_m^2(x)| = 0$

On a $\|f_m(x) - 0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ si $m \to +\infty$?

Or, $\|f_m(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{m^2x^2}{(1+m^2x^2)^2}\,dx \underset{t=mx}{=} \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt \to 0$ si $m \to +\infty$

D'où $f_m \xrightarrow[L^2(\mathbb{R})]{} 0$.