

3. Espaces $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$

Exercice 1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, établir que la fonction $x \mapsto \sin(kx)$ appartient à $L^1([0, 2\pi])$, $L^2([0, 2\pi])$ et $L^\infty([0, 2\pi])$, mais que ses normes dans ces espaces sont différentes.

(b) Déterminer la norme $\|\chi_{\mathbb{Q}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

(c) Donner un exemple de fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la norme est 1.

Exercice 2. On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(2\pi x).$$

(a) Déterminer si possible les normes de f et g dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Même question pour g dans $L^1([0, 1])$, $L^2([0, 1])$ et $L^\infty([0, 1])$.

(c) Calculer si possible le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions ifg et if .

Exercice 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \chi_{[-m, m]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer à quels espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ appartient la fonction f_m et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans chacun des espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^{3/2} x e^{-mx}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer à quels espaces $L^1([0, +\infty[)$, $L^2([0, +\infty[)$, $L^\infty([0, +\infty[)$ appartient la fonction f_m et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $[0, +\infty[$.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans chacun des espaces $L^1([0, +\infty[)$, $L^2([0, +\infty[)$ et $L^\infty([0, +\infty[)$.

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = e^{-2x} \frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer (si possible) la norme de f_m dans $L^1([0, +\infty[)$, $L^2([0, +\infty[)$ et $L^\infty([0, +\infty[)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(b) Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_M = \sum_{m=0}^M f_m.$$

(1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$ ainsi que la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ et sur tout compact de $[0, +\infty[$.

(2) Etudier la convergence de la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}}$ dans $L^1([0, +\infty[)$ et $L^2([0, +\infty[)$.

Exercice 6. Comparer les espaces $L^1([-1, 1])$, $L^2([-1, 1])$ et $L^\infty([-1, 1])$ vis-à-vis de l'inclusion. Comparer également les normes (en termes d'inégalités entre celles-ci).

Exercice 7. Montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 8. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Si $f_m \rightarrow f$ dans $L^1(E)$ et $g_m \rightarrow g$ dans $L^\infty(E)$, montrer que $f_m g_m \rightarrow fg$ dans $L^1(E)$.
- (b) Si $f_m \rightarrow f$ dans $L^2(E)$ et $g_m \rightarrow g$ dans $L^2(E)$, montrer que $f_m g_m \rightarrow fg$ dans $L^1(E)$.

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f \in C_0([a, b]) \cap C_1(]a, b[)$ et si $Df \in L^2(]a, b[)$, démontrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b - a) \|Df\|_{L^2(]a, b[)}^2.$$

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.
- (b) Les fonctions δ_n sont-elles dans $L^1(\mathbb{R})$, dans $L^2(\mathbb{R})$ et/ou dans $L^\infty(\mathbb{R})$? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite dans les espaces auxquels les fonctions appartiennent.
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1.$$

- (d) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (i.e. pour tout $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}$).

Exercice 11. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2m+1)x)}{\sin(x)} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$