5. Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

Exercice 1. Soient $a > 0$ et $r \in \mathbb{R}$. En tout point $y \in \mathbb{R}$, calculer si possible
$\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(e^{ix}e^{-|x|}\right)$, $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left((1-a|x|)\chi_{[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]}(x)\right)$, $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(e^{-|x-1|}\right)$ et $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(\sin(rx)\chi_{[-1,1]}(x)\right)$.

Exercice 2. (a) Calculer (si possible) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ où λ est une constante strictement positive.

(b) Pour tout $\lambda > 0$, on pose
$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a
$$R_a \star R_b = R_{a+b}.$$

(c) De la formule de Parseval, déduire que pour tous $a, b > 0$, on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab}\frac{1}{a+b}.$$

Exercice 3. Pour $b > a > 0$ et $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on considère l'équation intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2+a^2}\,dt = \frac{1}{x^2+b^2}.$$
La transformer sous forme d'une équation de convolution et déterminer $\mathcal{F}^- f$ et en déduire f.

Exercice 4. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 5. Soient $a, b > 0$. Si possible, calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\,dx.$$
Si en particulier $a > b$, calculer
$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\,dx.$$

Exercice 6. En utilisant le théorème du transfert, calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\sin(x)\,dx.$$

Exercice 7. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par
$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}$$
et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par
$$D_f(y) = \left|\mathcal{F}^-_y f\right|^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$
On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f \star f^s.$$

(b) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

(c) Montrer que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

(d) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

Exercice 8 (Equation de la chaleur). Soit une fonction $u = u(x,t)$ ($x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$) de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur $\mathbb{R}$ quel que soit $t \geq 0$. Soit v une constante strictement positive. On suppose que u vérifie l'équation de la chaleur

$$D_t\, u(x,t) = v^2 D_x^2\, u(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\, t \geq 0.$$

On pose

$$f(x) = u(x,0), \quad x \in \mathbb{R}$$

et on définit la fonction $F = F(y,t)$ ($y \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$) de telle sorte que, pour t fixé, $F(y,t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x,t)$.

(a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(y,t)$ vérifie

$$D_t\, F(y,t) + v^2 y^2 F(y,t) = 0.$$

(b) En déduire que, pour $y \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$F(y,t) = e^{-v^2 y^2 t}\, \mathcal{F}_y^-\, f.$$

(c) En déduire finalement que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2v\sqrt{t}y) e^{-y^2}\, dy.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 9. Démontrer que, dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, 0 est le seul élément tel que $f \star f = f$.

Exercice 10. Soit f une fonction réelle, intégrable sur $\mathbb{R}$ et dont la transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}\, \mathcal{F}_x^-\, f\, dx \right)$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si on suppose maintenant que

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } t \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

déduire de la relation précédente que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\pi x) + 1}{1 - x^2}\, dx = 0.$$

Exercice 11 (Intégrales de Fresnel). Etablir que

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

pour tout $\lambda > 0$.

L. Simons & F. Bastin – 30 octobre 2012