

5. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Exercice 1. Soient $a > 0$. En tout point $y \in \mathbb{R}$, calculer si possible

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm \left(e^{ix} e^{-|x|} \right), \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm \left((1 - a|x|) \chi_{[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]}(x) \right), \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm \left(e^{-|x-1|} \right) \text{ et } \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^\pm \left(\sin(2x) \chi_{[-1,1]}(x) \right).$$

Exercice 2. (a) Calculer (si possible) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) où λ est une constante strictement positive.

(b) Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a $R_a \star R_b = R_{a+b}$.

(c) En déduire que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab} \frac{1}{a + b}.$$

Exercice 3. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 4. Soient $a, b > 0$. Si possible, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{-+\infty} \frac{\sin(ax) \cos(bx)}{x} dx.$$

Si en particulier $a > b$, calculer

$$\int_0^{-+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x} dx.$$

Exercice 5. En utilisant le théorème du transfert, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x) dx.$$

Exercice 6. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x-t)} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = |\mathcal{F}_y^- f|^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'autocorrélation s'écrit $E_f = f \star f^s$.

(b) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

(c) Montrer que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

(d) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

Exercice 7 (Equation de la chaleur). Soit une fonction $u \in C_2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ telle que, pour tout $t \geq 0$, les fonctions $x \mapsto u(x, t)$, $x \mapsto D_x u(x, t)$ et $x \mapsto D_x^2 u(x, t)$ soient intégrables sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $U \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\dagger |D_t u(x, t)| \leq U(x)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Soit v une constante strictement positive. On suppose que u vérifie l'équation de la chaleur

$$D_t u(x, t) = v^2 D_x^2 u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

On pose

$$f(x) = u(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}$$

et on définit la fonction F de telle sorte que, pour $t \geq 0$ fixé, $F(y, t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x, t)$.

(a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(y, t)$ vérifie

$$D_t F(y, t) + v^2 y^2 F(y, t) = 0.$$

(b) En déduire que, pour $y \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$F(y, t) = e^{-v^2 y^2 t} \mathcal{F}_y^- f.$$

(c) En déduire finalement que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2v\sqrt{t}y) e^{-y^2} dy.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 8. Démontrer que, dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, 0 est le seul élément tel que $f \star f = f$.

Exercice 9. Soit f une fonction réelle, intégrable sur \mathbb{R} et dont la transformée de Fourier est intégrable sur \mathbb{R} .

(a) Montrer que

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{ixt} \mathcal{F}_x^- f dx \right)$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si on suppose maintenant que

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } t \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

déduire de la relation précédente que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\pi x) + 1}{1 - x^2} dx = 0.$$

Exercice 10 (Intégrales de Fresnel). Etablir que

$$\int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

pour tout $\lambda > 0$.

†. Cette hypothèse est par exemple vérifiée pour les fonctions à variables séparées, i.e. pour des fonctions u de la forme $u(x, t) = a(x)b(t)$ où $a \in C_2(\mathbb{R})$ et $b \in C_2([0, +\infty[)$.