

6. Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Exercice 1. Si possible, déterminer la transformée de Fourier des fonctions f , g et h définies presque partout sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-x^2/2}, \quad g(x) = \operatorname{sign}(x) \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right).$$

Exercice 2. Si $a > 0$ établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} \sin(a).$$

Exercice 3. On donne les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x + i}.$$

Déterminer la transformée de Fourier de f et de g .

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 4. Soit $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $F = f \star f$ si et seulement s'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $F = \mathcal{F}^\pm g$.