Analyse II, partie 1

Année académique 2012-2013
2^{e} Bac Mathématique et Physique

7. Séries trigonométriques de Fourier

Exercice 1. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \,]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in \,]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f de $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$.

(b) En déduire la valeur des sommes

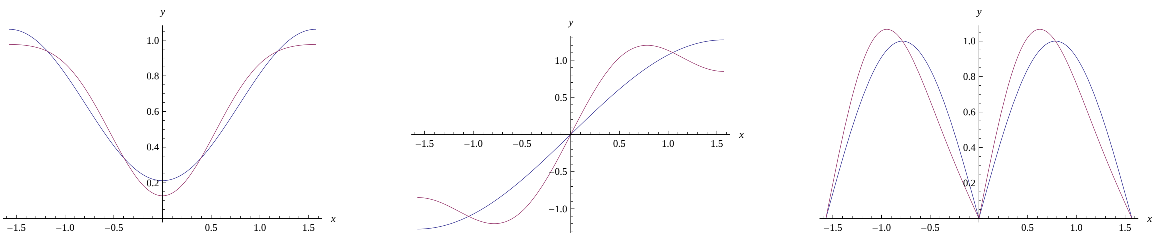
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Exercice 2. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

(c) Parmi les trois graphiques ci-dessous, déterminer celui qui représente les premiers termes du développement de f.



Exercice 3. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}.$$

Exercice 4. (a) On se place dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1, 1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g_m(x) = \cos(\pi m x)$.

(b) Dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1, 1])$, on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 5 (Formule sommatoire de Poisson). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}^{-}_{2\pi m} f)\, e^{2i\pi m x}.$$

En déduire que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

L. Simons & F. Bastin – 20 novembre 2012