Analyse II, partie 1

Année académique 2013-2014
2^e Bac Mathématique et Physique

7. Séries trigonométriques de Fourier

Exercice 1. (a) On se place dans l'espace $L^2([-1,1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g_m(x) = \cos(\pi m x)$.

(b) Dans l'espace $L^2([-1,1])$, on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

Exercice 2. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f de $L^2([-\pi,\pi])$.

(b) En déduire la somme des séries

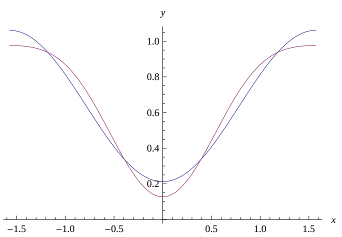
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

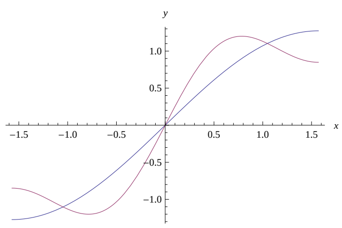
Exercice 3. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.

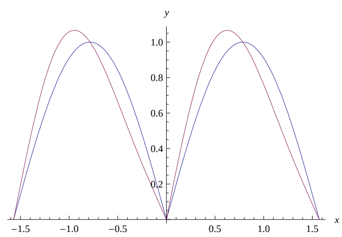
(b) Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$

(c) Parmi les trois graphiques ci-dessous, déterminer celui qui représente les premiers termes du développement de f.







Exercice 4 (Noyau de Poisson). Pour tout $r \in [0,1[$, on pose

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose aussi $e_m(x) = e^{imx}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Pour tous $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que

$$P_r(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e_m(\theta).$$

(b) Pour tout $r \in [0,1[$, calculer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta.$$

(c) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π. Montrer que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}\ \langle f, e_m\rangle\ e_m(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta - t)\,dt$$

pour tous $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}\ \langle f, e_m\rangle\ e_m(\theta) = f(\theta)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 5 (Formule sommatoire de Poisson). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}^-_{2\pi m} f)\, e^{2i\pi m x}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$