Révisions – Travail dirigé

Exercice 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- (a) La fonction $x \mapsto e^{i\pi x}$ appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R})$.
 (b) Le produit de convolution de deux fonctions impaires est impair.
 (c) Il existe une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

- (d) Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors f est borné (presque partout) sur $\mathbb{R}$.
 (e) Le produit d'une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ par sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (a) Calculer la valeur de $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

- (b) Montrer que $(D\Gamma(x))^2 \leq \Gamma(x) D^2\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1+m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Déterminer l'ensemble A des réels sur lequel cette suite converge ponctuellement ainsi que sa limite.
 (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les compacts inclus dans A .
 (c) Etudier la convergence de cette suite dans $L^1(A)$ et $L^2(A)$.

Exercice 4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (a) Montrer que le produit de convolution $f \star f$ est défini sur $\mathbb{R}$ et déterminer son expression en tout point de $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $(f \star f)(\frac{\pi}{2})$.
 (b) Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on pose $\Psi_n = f \star \dots \star f$ (produit de convolution composé de n facteurs f). Si on note $[f]$ le support de f , montrer que Ψ_n est nul en dehors de $n[f]$.
 (c) Calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_n(x) dx.$$

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-a|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Déterminer alors sa transformée de Fourier positive.
 (b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{x(a^2 + x^2)} dx.$$

Exercice 6. Déterminer la transformée de Fourier négative de la fonction

$$x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x} \chi_{\mathbb{R}_0}(x).$$

Exercice 7. Soit la fonction impaire f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$.

- (a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.
- (b) En déduire la valeur des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^6}.$$

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Exercice 8. Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est tel que $f \star f^* = 0$, alors $f = 0$ presque partout.

Exercice 9. Soit $f \in C_1([0, 2\pi])$ une fonction à valeurs réelles telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

- (a) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \leq \int_0^{2\pi} (Df(t))^2 dt.$$

- (b) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $f = a \cos + b \sin$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Pour rappel, on note $f^*(x) = \overline{f(-x)}$.