Année académique 2012-2013
2^{e} Bac Mathématique et Physique

Révisions – Travail dirigé (Solutions)

Solution de l'exercice 1. (a) Faux, c'est une fonction de module 1 dans $\mathbb{R}$. (b) Faux, c'est une fonction paire. (c) Faux par le théorème de Riemann-Lebesgue. (d) Vrai. (e) Vrai.

Solution de l'exercice 2. (a) $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}$. (b) C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de l'exercice 3. (a) La suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur $A = \mathbb{R}_0$ vers la fonction 0. (b) Cette suite ne converge pas uniformément sur A, mais bien sur tout compact inclus dans A. (c) Cette suite converge dans $\mathrm{L}^1(A)$, mais pas dans $\mathrm{L}^2(A)$.

Solution de l'exercice 4. (a) On a

$$(f \star f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((\pi + x)\cos(x) - \sin(x)\right) & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}\left((\pi - x)\cos(x) + \sin(x)\right) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $(f \star f)(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$. (b) Par récurrence, on a $[\Psi_n] \subseteq n\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. (c) L'intégrale vaut 2^n.

Solution de l'exercice 5. (a) La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$. On a

$$\mathcal{F}_y^+ f = \frac{2ae^{iy}}{a^2 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

(b) L'intégrale vaut [1] $\frac{\pi e^{-|a|}}{2a^2}\,\mathrm{sh}\,|a|$ pour tout $a \in \mathbb{R}_0$.

Solution de l'exercice 6. Si on note g cette fonction, $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et

$$\mathbb{F}_y^- g = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in]-\infty, -1[\cup\{0\}\cup]1, +\infty[\\ i\pi & \text{si } y \in]-1, 0[\\ -i\pi & \text{si } y \in]0, 1[\\ i\frac{\pi}{2} & \text{si } y = -1 \\ -i\frac{\pi}{2} & \text{si } y = 1 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 7. (a) On a

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$$

dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$, presque partout sur $[-\pi, \pi]$ et même partout sur $[-\pi, \pi]$. (b) Les sommes des séries sont respectivement $\frac{\pi^3}{32}$ et $\frac{\pi^6}{960}$.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Solution de l'exercice 8 (Suggestion). Regarder le produit de convolution au point 0.

Solution de l'exercice 9 (Suggestion). Penser à la formule de Parseval pour les fonctions f et Df.

L. Simons & F. Bastin – 17 décembre 2012

1. Pour rappel, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.