

Test de rentrée

Exercice 1. (a) Une marchandise vendue à un prix p est soldée durant le mois de janvier à -10% , coûtant ainsi p' . Après la période des soldes, la marchandise n'a pas été vendue et le vendeur augmente le prix p' de 10% ; la marchandise vaut alors p'' . Un acheteur potentiel, qui ne peut se déplacer durant la période des soldes a-t-il intérêt à acheter la marchandise avant ou après cette période? Justifier.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ l'équation $2\cos^2(x) = 5\sin(x) - 1$.

(c) Déterminer si les séries suivantes convergent et déterminer la somme des séries convergentes :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]^m, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}.$$

Exercice 2. Soit a un paramètre réel. Etudier la convergence des suites $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de terme général x_m égal à

$$(a) x_m = \sqrt[m]{m^2} \quad (b) x_m = \sqrt{m} (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) \quad (c) x_m = e^{-am^2} \quad (d) x_m = \frac{(m!)^2}{(2m)!}$$

Exercice 3. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad (b) \int_0^{\pi/4} \sin(x) \cos(3x) dx \quad (c) \int_0^1 \exp(-i\pi x) dx$$

$$(d) \int_{-\infty}^0 e^{ix} dx \quad (e) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2(x)}}$$

Exercice 4. (a) Calculer si possible l'intégrale double

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[6]{y}}^1 \sqrt{\frac{1+x^4}{y}} dx \right) dy.$$

(b) Si A est la région bornée du premier quadrant comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la parabole d'équation $y = x^2$, calculer si possible l'intégrale double

$$\iint_A \frac{dx dy}{xy}$$

(c) Calculer si possible l'intégrale double

$$\iint_E y e^x dx dy$$

où E est l'ensemble hachuré dans la représentation graphique ci-dessous.

