Révisions - Travail dirigé 2

Exercice 1. (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = nx e^{-n\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.
- (b) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}_0$ et sur tout borné fermé de $\mathbb{R}_0$.
- (c) Etudier la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(2) (a) Montrer que la fonction

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_0$.

- (b) Calculer $S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$. En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.
Suggestion. Penser à écrire f_n comme la dérivée d'une gaussienne particulière.

Exercice 2. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$g_m(x) = \frac{e^x x^m}{m!} \chi_{]0, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$, calculer si possible le produit de convolution $g_m \star g_n$ (en tout point de $\mathbb{R}$) et montrer que celui-ci est en fait la fonction g_k pour un $k \in \mathbb{N}_0$ à déterminer.

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a > 0$ et soient $r, s \in \mathbb{R}$. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-r|x+s|}.$$

- (1) La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$?
- (2) Déterminer si possible la transformée de Fourier de la fonction g .
- (3) Déterminer si possible la transformée de Fourier de la fonction Df .
- (4) En déduire si possible la transformée de Fourier de la fonction f .

Préciser dans chacun des cas s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4. (1) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $u_m(x) = \cos(mx)$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que les éléments de la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sont orthogonaux deux à deux dans $L^2([-\pi, \pi])$. Calculer la norme dans $L^2([-\pi, \pi])$ de u_m pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Sachant que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx)$$

dans $L^2([-\pi, \pi])$, déduire du point précédent la somme de la série

$$\sigma = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$

- (2) Développer si possible la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ en série trigonométrique de Fourier dans l'espace $L^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

Exercice 5. (1) Est-il possible de calculer $\ln((1+i)^i)$? Pourquoi? En cas de réponse affirmative, déterminer la valeur de ce nombre complexe (en simplifiant au maximum votre réponse).

(2) Déterminer le domaine d'holomorphic de la fonction f (d'une variable complexe) définie par

$$f(z) = \ln(1+iz) - \ln(1-iz).$$

(3) Montrer que la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction if est une fonction à valeurs réelles. Déterminer cette fonction.

Exercice 6. Développer les fonctions suivantes (données sous forme explicite) en série de puissances au point z_0 donné et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu :

$$(1) \quad f(z) = \frac{z}{z^2-1}, \quad z_0 = 0 \qquad (2) \quad g(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad z_0 = 0.$$

Exercice 7. Soient les fonctions f , g et j (d'une variable complexe) définies par

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3+1}, \quad g(z) = ze^{\frac{1}{z}} \quad \text{et} \quad j(z) = \frac{\sin(z)}{\sin(iz)}.$$

- (1) Déterminer le domaine d'holomorphic de ces fonctions.
- (2) Déterminer les éventuels zéros de ces fonctions et préciser leur multiplicité.
- (3) Quelles sont les singularités isolées de ces fonctions? De quel type sont-elles?
- (4) Déterminer le résidu de ces fonctions en chacune de leur singularité isolée.
- (5) Pour la fonction g , déterminer son développement de Laurent en chacune de ses singularités isolées. Préciser ses parties régulière et singulière.

Exercice 8. (1) Soit γ un chemin fermé simple régulier (orienté « aire à gauche ») qui décrit le bord d'un carré qui contient l'origine. Déterminer si possible la valeur des intégrales suivantes :

$$A = \int_{\gamma} e^{1/z^2} dz \quad \text{et} \quad B = \int_{\gamma} ze^{1/z^2} dz$$

(2) Soit γ un chemin fermé simple régulier (orienté « aire à gauche ») qui décrit le bord du carré centré en $1/2$, de côtés parallèles aux axes et de longueur 1. Déterminer si possible la valeur des intégrales suivantes :

$$C = \int_{\gamma} \bar{z} dz \quad \text{et} \quad D = \int_{\gamma} (\Re z)^2 dz$$

Exercice 9. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5} - \cos(x)} \quad \text{et} \quad J = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{4+x^4}.$$

Exercice 10. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

- (1) La fonction $z \mapsto e^{i|z|}$ est bornée dans $\mathbb{C}$.
- (2) Si f est une fonction holomorphic sur $\mathbb{C}$ et admet une limite nulle à l'infini, alors f est nul dans $\mathbb{C}$.
- (3) Si la fonction f , holomorphic sur $\mathbb{C}$, admet un zéro de multiplicité 1 au point 0, alors la fonction $z \mapsto f(1/z)$ admet un pôle d'ordre 1 au point 0.
- (4) Si f est une fonction holomorphic sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ (Ω étant un ouvert de $\mathbb{C}$ et z_0 un point de Ω) et si le résidu de f en z_0 est nul, alors f se prolonge en une fonction holomorphic dans Ω .