

1. Intégrales curvilignes et fonctions holomorphes

- Exercice 1.** (a) Calculer le logarithme principal des nombres complexes suivants : -10 , $2 - 2i$, i et e^{-i} .
Même question en considérant le logarithme $\ln_0$ (i.e. le logarithme où l'argument est pris dans $[0, 2\pi[$).
(b) Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants : $(-i)^i$ et $(-1)^{i+1}$.

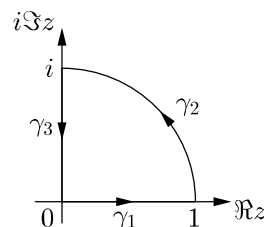
Exercice 2. Déterminer le domaine d'holomorphic des fonctions suivantes (données sous forme explicite) :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f_1(z) = e^{1/z} & \text{(b)} f_2(z) = \frac{1}{\sin(z)} & \text{(c)} f_3(z) = \ln_0(1+z) \\ \text{(d)} f_4(z) = \frac{\ln(z)}{z^3+1} & \text{(e)} f_5(z) = \frac{z^{1/2}}{(z^2+z+1)^2} & \text{(f)} f_6(z) = \frac{\text{sh}(z)}{e^z-1} \end{array}$$

Exercice 3. (a) Calculer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} |z| dz$$

si γ est la juxtaposition des chemins γ_1 , γ_2 et γ_3 de classe C_1 représentant les courbes données par le graphique ci-contre.



- (b) Si γ est un chemin simple régulier qui décrit le cercle centré en l'origine et de rayon 1, calculer la valeur des intégrales curvilignes suivantes :

$$\begin{array}{lll} (1) \int_{\gamma} \Re z dz & (2) \int_{\gamma} e^{z^2} dz & (3) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-2} \\ (4) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-\frac{1}{2}} & (5) \int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{2z-i} dz & (6) \int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{(z-\frac{1}{2})^2} dz \end{array}$$

- (c) Intégrer la fonction f (d'une variable complexe) définie par

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^2 + 4}$$

sur chacune des circonférences définies suivantes (on supposera que ces circonférences sont parcourues dans le sens trigonométrique) : $\mathcal{C}_1 \equiv |z - i| = 2$, $\mathcal{C}_2 \equiv |z - 1| = 2$ et $\mathcal{C}_3 \equiv |z| = 3$.

- (d) Soit γ un chemin régulier par morceaux, injectif, orienté « aire à gauche » et qui paramétrise le bord du carré de sommets 0 , 3 , $3 + 3i$ et $3i$. Calculer la valeur des intégrales curvilignes

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z+1+i}, \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1-i} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

Exercice 4. Soit $a > 1$. En utilisant la technique des fonctions holomorphes, calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos(x)}.$$

Exercice 5. (a) La fonction $\sin$ est-elle bornée sur $\mathbb{C}$? Justifier.

- (b) L'affirmation « La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ définie sur $\mathbb{C}$ tend vers 0 à l'infini » est-elle vraie ou fausse? Justifier.