

Travail dirigé 3

Exercice 1. (1) Est-il possible de calculer $\ln((1+i)^i)$? Pourquoi ? En cas de réponse affirmative, déterminer la valeur de ce nombre complexe (en simplifiant au maximum votre réponse).

(2) Déterminer le domaine d'holomorphie de la fonction f (d'une variable complexe) définie par

$$f(z) = \ln(1+iz) - \ln(1-iz).$$

(3) Montrer que la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction if est une fonction à valeurs réelles. Déterminer cette fonction.

Exercice 2. Développer les fonctions suivantes (données sous forme explicite) en série de puissances au point z_0 donné et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu :

$$(1) \quad f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}, \quad z_0 = 0 \qquad (2) \quad g(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad z_0 = 0.$$

Exercice 3. Soient les fonctions f , g et j (d'une variable complexe) définies par

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3+1}, \quad g(z) = ze^{\frac{1}{z}} \quad \text{et} \quad j(z) = \frac{\sin(z)}{\sin(iz)}.$$

- (1) Déterminer le domaine d'holomorphie de ces fonctions.
- (2) Déterminer les éventuels zéros de ces fonctions et préciser leur multiplicité.
- (3) Quelles sont les singularités isolées de ces fonctions ? De quel type sont-elles ?
- (4) Déterminer le résidu de ces fonctions en chacune de leur singularité isolée.
- (5) Pour la fonction g , déterminer son développement de Laurent en chacune de ses singularités isolées. Préciser ses parties régulière et singulière.

Exercice 4. Soit γ un chemin fermé simple régulier (orienté « aire à gauche ») qui décrit le cercle centré en $i/2$ et de rayon 1. Déterminer si possible la valeur des intégrales suivantes :

$$A = \int_{\gamma} \frac{e^z}{z - i\pi} dz, \quad B = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz, \quad C = \int_{\gamma} \bar{z} dz \quad \text{et} \quad D = \int_{\gamma} e^{1/z} dz.$$

Exercice 5. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5} - \cos(x)} \quad \text{et} \quad J = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{4 + x^4}.$$

Exercice 6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- (1) La fonction $z \mapsto e^{i|z|}$ est bornée dans $\mathbb{C}$.
- (2) Si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et admet une limite nulle à l'infini, alors f est nul dans $\mathbb{C}$.
- (3) Si la fonction f , holomorphe sur $\mathbb{C}$, admet un zéro de multiplicité 1 au point 0, alors la fonction $z \mapsto f(1/z)$ admet un pôle d'ordre 1 au point 0.
- (4) Si f est une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ (Ω étant un ouvert de $\mathbb{C}$ et z_0 un point de Ω) et si le résidu de f en z_0 est nul, alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω .