

Analyse II, partie 1 – Convergences ponctuelle et uniforme

Exercice 1. Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, sur $]0, +\infty[$, sur $[r, +\infty[$ avec $r > 0$ et sur les compacts de $]0, +\infty[$, de la suite de fonctions f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies par

$$f_m(x) = m^2 x^2 e^{-mx}, \quad x \geq 0.$$

Exercice 2. Etudier la convergence ponctuelle sur $[0, +\infty[$ et la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, sur $]0, +\infty[$, $[r, +\infty[$ avec $r > 0$ et sur les intervalles compacts de $]0, +\infty[$ et de $[0, +\infty[$, de la suite de fonctions f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = \frac{mx}{mx + 1}, \quad x \geq 0.$$

Exercice 3. Etudier la convergence ponctuelle sur $\mathbb{R}$ et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et sur les intervalles $] -\infty, r]$ avec $r > 0$, de la suite de fonctions f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = \frac{x}{m} \chi_{[0, m]}(x) + (m + 1 - x) \chi_{[m, m+1]}(x).$$

Exercice 4. Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Si cette suite converge uniformément vers la fonction f sur $]a, b[$, montrer que f est intégrable sur $]a, b[$ et que

$$\int_a^b f_m(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

si $m \rightarrow +\infty$.

Exercice 5. Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) la suite de fonctions définies par

$$f_m(x) = (1 - x^2)^m, \quad x \in [0, 1].$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0, 1]$.
- (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[0, 1]$ et sur les sous-intervalles de $[0, 1]$.
- (c) Calculer la limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^m dx.$$

Exercice 6. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2 m} x^m \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (1 + t^2)^{-m} dt \right) x^m.$$

Exercice 7. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ en série de puissances entières de x . Etudier la convergence ponctuelle et uniforme de la série obtenue.