Convergences ponctuelle et uniforme

Exercice 1. Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, sur $]0, +\infty[$, sur $[r, +\infty[$ avec $r > 0$ et sur les compacts de $]0, +\infty[$, de la suite de fonctions f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies par

$$f_m(x) = m^2x^2e^{-mx}, \quad x \geq 0.$$

Exercice 2. Etudier la convergence ponctuelle sur $[0, +\infty[$ et la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, sur $]0, +\infty[$, $[r, +\infty[$ avec $r > 0$ et sur les intervalles compacts de $]0, +\infty[$ et de $[0, +\infty[$, de la suite de fonctions f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = \frac{mx}{mx + 1}, \quad x \geq 0.$$

Exercice 3. Etudier la convergence ponctuelle sur $\mathbb{R}$ et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et sur les intervalles $] - \infty, r]$ avec $r > 0$, de la suite de fonctions f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = \frac{x}{m}\chi_{[0,m]}(x) + (m + 1 - x)\chi_{]m,m+1]}(x).$$

Exercice 4. Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Si cette suite converge uniformément vers la fonction f sur $]a, b[$, montrer que f est intégrable sur $]a, b[$ et que

$$\int_a^b f_m(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx$$

si $m \to +\infty$.

Exercice 5. Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) la suite de fonctions définies par

$$f_m(x) = (1 - x^2)^m, \quad x \in [0, 1].$$

(a) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0, 1]$.
(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[0, 1]$ et sur les sous-intervalles de $[0, 1]$.
(c) Calculer la limite

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^m\, dx.$$

Exercice 6. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2m}\, x^m \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (1 + t^2)^{-m}\, dt\right) x^m.$$

Exercice 7. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ en série de puissances entières de x.

Exercice 8. Posons

$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m^2}.$$

(a) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de cette série.
(b) Où la fonction S est-elle définie, continue et dérivable ?
(c) Etablir qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$S(x) + S(1 - x) = a - \ln(x)\ln(1 - x)$$

pour tout $x \in]0, 1[$.

(d) Montrer que

$$a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

L. Simons & F. Bastin – 26 septembre 2011