Produit de convolution

Exercice 1. Calculer si possible le produit de convolution de la fonction $\chi_{[0,+\infty[}$ avec elle-même.

Exercice 2. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Calculer si possible le produit de convolution de f et g.

(b) Représenter le graphique des fonctions f, g et $f \star g$.

Exercice 3. (a) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f \star g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Même question si

$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 4. Soit l'échelon de Heaviside $Y = \chi_{]0,+\infty[}$. Posons

$$Y_\lambda^{(m)}(x) = \frac{e^{\lambda x} x^{m-1}}{\Gamma(m)} Y(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que, pour $m, n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$Y_\lambda^{(m+n)} = Y_\lambda^{(m)} \star Y_\lambda^{(n)}.$$

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Si on pose

$$f(x) = e^{-ax} \chi_{[0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-bx} \chi_{[0,+\infty[}(x),$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f \star g(x)}{x}\, dx = \frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$. Posons

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la fonction h est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et que l'on a

$$\lim_{x \to +\infty} e^x h(x) = 0.$$

Exercice 7. Calculer $\chi_A \star \chi_B$ lorsque

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Exercice 8. On définit par récurrence les B-splines B_m de degré m selon

$$B_1 = \chi_{[0,1]} \quad \text{et} \quad B_{m+1} = B_m \star B_1,\ m \in \mathbb{N}_0\,.$$

Démontrer que

(a) pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $B_m|_{[k,k+1]}$ ($k \in \{0, \ldots, m-1\}$) est un polynôme de degré $m-1$,

(b) pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, B_m est nul hors de $[0,m]$,

(c) pour tout $m \geq 2$, $B_m \in \mathrm{C}_{m-2}(\mathbb{R})$,

(d) pour tout $m \geq 3$, $DB_m(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$,

(e) pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $B_m(\frac{m}{2} + x) = B_m(\frac{m}{2} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Pour $k \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$e_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer que

$$D^n(e_m \star \varphi) = e_{m-n} \star \varphi \quad \text{et} \quad D^k(e_k \star \varphi) = \varphi$$

pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $m > n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 10 (Critère d'annulation *pp*)**.** Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que $f = 0$ *pp* dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.