Analyse II (1^{re} Partie)

Correction de l'examen du 14 janvier 2009

2^{e} Bachelier en Sciences Mathématiques

Question 1. (a) La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln x^\alpha}{1 + x^{2\alpha}} = \alpha \frac{\ln x}{1 + x^{2\alpha}}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. Puisque la limite

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \frac{\ln x}{1 + x^{2\alpha}} = 0$$

existe et est finie quel que soit $\alpha \geq 0$, on obtient que la fonction f est intégrable en 0 quel que soit $\alpha \geq 0$. Si $\alpha > 1/2$, on a $\Theta = \alpha + \frac{1}{2} > 1$ et il vient que

$$\lim_{x \to +\infty} x^\Theta \frac{\ln x}{1 + x^{2\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2\alpha}}{1 + x^{2\alpha}} x^{\frac{2\alpha+1}{2}} \frac{\ln x}{x^{2\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2\alpha}}{1 + x^{2\alpha}} \frac{\ln x}{x^{\alpha - 1/2}} = 0.$$

La fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ lorsque $\alpha > 1/2$. Si $\alpha = 0$, la fonction f est identiquement nulle et est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. Dans le cas où $0 < \alpha \leq 1/2$, la fonction f n'est pas intégrable à l'infini car

$$\lim_{x \to +\infty} x \frac{\ln x}{1 + x^{2\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x^{2\alpha}} \ln x = +\infty.$$

Au total, la fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha \in \{0\} \cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.

(b) La fonction f définie par $f(x) = \ln(|x - 1|)$ est continue sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Puisque

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x)^{1/2} \ln(|x - 1|) = \lim_{t \to 0^+} \sqrt{t} \ln t = 0,$$

on obtient que la fonction f est intégrable sur $[0, 1]$. Par contre, puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(|x - 1|) = +\infty,$$

on en déduit que la fonction f n'est pas intégrable sur $]1, +\infty[$.

(c) La fonction ln est continue sur $]0, e]$ et est intégrable en 0 puisque

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1/2} \ln x = 0.$$

Il vient immédiatement

$$\begin{aligned} \|\ln\|_{L^1([0,e])} &= \int_0^e |\ln x| \, dx = -\int_0^1 \ln x \, dx + \int_1^e \ln x \, dx \\ &= -[x \ln x - x]_0^1 + [x \ln x - x]_1^e = 2 \end{aligned}$$

puisque $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

(d) La fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$$

est continue sur $[0,\, 1[$ et sur $]1,\, +\infty[$. On observe que

$$f(x) = \ln|x+1| - \ln|x-1|.$$

Or, la fonction $x \mapsto \ln|x+1|$ est continue sur le compact $[0,\, 1]$ et appartient donc à $L^2([0,\, 1])$. La fonction $x \mapsto \ln|x-1|$ est continue sur $[0,\, 1[$ et est de carré intégrable sur $[0,\, 1]$ puisque

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{1/2} \ln^2|x-1| = \lim_{t\to 0^+} t^{1/2}\ln^2 t = 0.$$

On obtient donc que f est la différence entre deux fonctions de carré intégrable sur $[0,\, 1]$ et est donc également de carré intégrable sur $[0,\, 1]$. Dès lors, puisque $[0,\, 1]$ est intégrable, la fonction f appartient également à $L^1([0,\, 1])$. On constate que

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 2.$$

Par conséquent, on sait que $f \notin L^1([1,\, +\infty[)$. Puisque

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f^2(x) = 4,$$

on obtient que $f \in L^2([1,\, +\infty[)$. Note : On peut également montrer par une double application du théorème de l'Hospital que

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} f^2(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\ln^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0,$$

ce qui permet de conclure également que $f \in L^2([1,\, +\infty[)$.

Question 2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction

$$x \mapsto g(x)f(y-x) = e^{-x}(y-x)\chi_{]0,\,+\infty[}(x)$$

est identiquement nulle sur $]-\infty,\, 0[$, converge vers y lorsque $x \to 0^+$ et satisfait à

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 g(x)f(y-x) = 0.$$

La fonction $x \mapsto g(x)f(y-x)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ quel que soit $y \in \mathbb{R}$, et il vient

$$(g*f)(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}(y-x)\, dx = y-1$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Question 3. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et de module majoré par la fonction $e^{-|x|}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x^- f &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-|y|}\cos y\, dy = 2\int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-y}\cos y\, dy \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-y}\cos((x+1)y)\, dy + \int_0^{+\infty} e^{-y}\cos((x-1)y)\, dy \\
&= \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1}{1+(x-1)^2} = 2\,\frac{x^2+2}{x^4+4}
\end{aligned}$$

puisqu'on établit aisément que

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(ty)\,dy = \frac{1}{1+t^2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) (a été résolu explicitement au cours théorique) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et on a

$$\lim_{x\to 0^\pm} g^2(x) = 1.$$

De plus, on a que $g^2(x) \leq 1/x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ donc

$$\lim_{x\to\infty} |x|^{3/2}\, g^2(x) = 0.$$

La fonction g est donc de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Puisque g est impair, on déduit que sa transformée de Fourier dans L^2 est impaire pp sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de calculer $\mathbb{F}_x g$ pour $x > 0$. Fixons $x > 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il vient successivement (en ayant justifié le sens des intégrales)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x^-(g\chi_{[-m,\,m]}) &= \int_{-m}^{m} e^{-ixy} g(y)\,dy = -2i\int_0^m \sin(xy)\frac{\sin(y)}{y}\,dy \\
&= i\int_0^m \frac{\cos((x+1)y)-\cos((x-1)y)}{y}\,dy \\
&= -i\int_0^m \int_{x-1}^{x+1} \sin(ty)\,dt\,dy \\
&= -i\int_{x-1}^{x+1}\int_0^m \sin(ty)\,dy\,dt \\
&= i\int_{x-1}^{x+1} \frac{\cos(mt)-1}{t}\,dt.
\end{aligned}$$

Cela étant, si $x > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}\chi_{[x-1,\,x+1]}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et il vient que

$$\begin{aligned}
\int_{x-1}^{x+1} \frac{\cos(mt)-1}{t}\,dt &= \Re \int_{\mathbb{R}} e^{imt}\left(\frac{1}{t}\chi_{[x-1,\,x+1]}(t)\right)dt + \ln\frac{x-1}{x+1} \\
&= \Re\left(\mathcal{F}^+_{t\to m}\left(\frac{1}{t}\chi_{[x-1,\,x+1]}(t)\right)\right) + \ln\frac{x-1}{x+1} \\
&\to \ln\frac{x-1}{x+1}
\end{aligned}$$

lorsque $m \to +\infty$ en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue. Pour $x \in]0,\,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{x-1}^{x+1} \frac{\cos(mt)-1}{t}\,dt &= \int_{x-1}^{1-x} \frac{\cos(mt)-1}{t}\,dt + \int_{1-x}^{x+1} \frac{\cos(mt)-1}{t}\,dt \\
&= \int_{1-x}^{x+1} \frac{\cos(mt)-1}{t}\,dt
\end{aligned}$$

puisque la fonction $t \mapsto \frac{\cos(mt)-1}{t}$ est impaire. De là, on tire comme précédemment que

$$\begin{aligned}
\int_{x-1}^{x+1} \frac{\cos(mt)-1}{t}\,dt &= \Re \int_{\mathbb{R}} e^{imt}\left(\frac{1}{t}\chi_{[1-x,\,1+x]}(t)\right)dt + \ln\frac{1-x}{1+x} \\
&\to \ln\frac{1-x}{1+x}
\end{aligned}$$

lorsque lorsque $m \to +\infty$ en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}\chi_{[1-x,\,1+x]}(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ vu que $x \in]0,\,1[$. On a donc obtenu que

$$\int_{x-1}^{x+1} \frac{\cos(mt)-1}{t}\,dt \to \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

lorsque $m \to +\infty$, pour tout $x > 0$ différent de 1. On en déduit donc que

$$\mathbb{F}_x^- g = i \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

pour tout $x > 0$ différent de 1 et, par imparité,

$$\mathbb{F}_x^- g = -i \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

pour presque tout $x < 0$.

Question 4. (a) Quel que soit l'entier m positif ou nul mais différent de 1, on a

$$\langle f, g_m\rangle = \int_{-1}^{1} \cos(\pi x)\cos(\pi m x)\,dx = \int_0^1 \cos((m+1)\pi x) + \cos((m-1)\pi x)\,dx = 0.$$

De plus, on obtient

$$\langle f, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} \cos^2(\pi x)\,dx = 1.$$

(b) Vu ce qui précède, il vient

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x)\ dx = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \langle \cos(\pi\cdot), \cos(m\pi\cdot)\rangle = a_1 \langle \cos(\pi\cdot), \cos(\pi\cdot)\rangle = a_1.$$

Comme

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x)\ dx = -\frac{4}{\pi^2},$$

on en déduit que

$$a_1 = -\frac{4}{\pi^2}.$$