Travail dirigé 2 – Solutions

Solution de l'exercice 1. (a) Faux vu le théorème de Riemann-Lebesgue. (b) Vrai. (c) Vrai.

Solution de l'exercice 2. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathcal{F}_y^- f = -2\pi \frac{\sin(\pi y)}{y^2-1} = -2\pi h(y)$$

pour $y \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De plus, $\mathcal{F}_1^- f = \pi^2$ et $\mathcal{F}_{-1}^- f = -\pi^2$. La fonction g appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mais pas à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\mathbb{F}_y^- g = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in]-\infty,-1[\cup\{0\}\cup]1,+\infty[\\ i\pi & \text{si } y \in]-1,0[\\ -i\pi & \text{si } y \in]0,1[\\ i\frac{\pi}{2} & \text{si } y=-1 \\ -i\frac{\pi}{2} & \text{si } y=1 \end{cases}.$$

La fonction h est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a $\mathcal{F}_y^- h = f(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, l'intégrale vaut

$$\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-2|a|}).$$

Solution de l'exercice 4. (a) La fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, mais est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. (b) La fonction Df est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathcal{F}_\xi^-(Df) = \pi\left(e^{-|\xi|/a} - e^{-|\xi|/b}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(c) Pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{F}_\xi^- f = -\frac{i\pi}{\xi}\left(e^{-|\xi|/a} - e^{-|\xi|/b}\right).$$

Solution de l'exercice 5. (a) On a

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$$

dans $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$, presque partout sur $[-\pi,\pi]$ et même partout sur $[-\pi,\pi]$. (b) Les sommes des séries sont respectivement $\frac{\pi^3}{32}$ et $\frac{\pi^6}{960}$.

Solution de l'exercice 6. (a) La suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur $A=\mathbb{R}_0$ vers la fonction 0. (b) Cette suite ne converge pas uniformément sur A, mais bien sur tous les fermés bornés inclus dans A vers 0. (c) Cette suite converge dans $\mathrm{L}^1(A)$ vers 0, mais pas dans $\mathrm{L}^2(A)$.

Solution de l'exercice 7. (a) La fonction f est convolable avec elle-même et on a

$$(f\star f)(x) = x\,e^{cx}\,\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) La fonction $f\star f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Re c < 0$.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Solution de l'exercice 8. /

Solution de l'exercice 9. /