

Révisions – Travail dirigé (Solutions)

Solution de l'exercice 1. (a) Faux, c'est une fonction de module 1 dans $\mathbb{R}$. (b) Faux, c'est une fonction paire. (c) Faux par le théorème de Riemann-Lebesgue. (d) Vrai. (e) Vrai.

Solution de l'exercice 2. (a) $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}$. (b) C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de l'exercice 3. (a) La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement sur $A = \mathbb{R}_0$ vers la fonction 0. (b) Cette suite ne converge pas uniformément sur A , mais bien sur tous les fermés bornés inclus dans A vers 0. (c) Cette suite converge dans $L^1(A)$ vers 0, mais pas dans $L^2(A)$.

Solution de l'exercice 4. On a

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

et la somme de la série vaut $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 5. (a) On a

$$(f \star f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}((\pi+x)\cos(x) - \sin(x)) & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}((\pi-x)\cos(x) + \sin(x)) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $(f \star f)(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$. (b) Par récurrence, on a $[\Psi_n] \subseteq n[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (c) L'intégrale vaut 2^n .

Solution de l'exercice 6. (a) L'intégrale est nulle vu que f est une fonction impaire. (b) Il est plus simple de calculer la transformée de Fourier (positive) de $x \mapsto i\pi \sin(x) \chi_{[-\pi, \pi]}(x)$ et d'appliquer ensuite le théorème de Fourier. (c) L'intégrale vaut $\frac{\pi^2}{4}$.

Solution de l'exercice 7. Si on note g cette fonction, $g \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ et

$$\mathbb{F}_y^- g = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, +\infty[\\ i\pi & \text{si } y \in]-1, 0[\\ -i\pi & \text{si } y \in]0, 1[\\ i\frac{\pi}{2} & \text{si } y = -1 \\ -i\frac{\pi}{2} & \text{si } y = 1 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 8. L'intégrale vaut $\frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-2|a|})$ pour tout $a \in \mathbb{R}_0$.

Solution de l'exercice 9. La transformée de Fourier évaluée au point $\xi \in \mathbb{R}$ de la fonction considérée est égale à (a) $F(-\xi)$, (b) $\frac{1}{2}F(\frac{\xi}{2})$, (c) $F(\xi - 2)$, (d) $(F(\xi))^2$ et (e) $\xi F(\xi)$.

Solution de l'exercice 10. (a) On a

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$$

dans $L^2([-\pi, \pi])$, presque partout sur $[-\pi, \pi]$ et même partout sur $[-\pi, \pi]$. (b) Les sommes des séries sont respectivement $\frac{\pi^3}{32}$ et $\frac{\pi^6}{960}$.

— Exercices destinés aux mathématiciens —

Solution de l'exercice 11 (Suggestion). Regarder le produit de convolution au point 0.

Solution de l'exercice 12 (Suggestion). Penser à la formule de Parseval pour les fonctions f et Df .

Solution de l'exercice 13 (Suggestion). Résoudre l'équation différentielle (à second membre) linéaire d'ordre 1 et utiliser l'injectivité de l'opérateur de Fourier (dans $L^1(\mathbb{R})$).