2ème année de bachelier en mathématique et en physique
Analyse II
Examen du 22 janvier 2008
SOLUTIONS

Question 1. Examiner l'intégrabilité de

$$x \mapsto \frac{\ln x^\alpha}{1+x^\alpha}$$

sur $]0,+\infty[$ pour toutes les valeurs du réel non nul α. Justifier votre réponse.

Solution. Notons f la fonction donnée. Elle est continue sur l'intervalle considéré et a aussi pour expression

$$f(x) = \alpha \frac{\ln x}{1+x^\alpha};$$

Dès lors, pour $\alpha > 0$, il s'agit de la question de l'interrogation du 16 octobre 2007 (dont une correction a été fournie): la fonction est toujours intégrable en 0^+ et elle l'est en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $\alpha < 0$, la fonction n'est pas intégrable sur l'intervalle considéré car elle n'est pas intégrable en $+\infty$; de fait

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Remarquons que dans le cas $\alpha < 0$, la fonction est intégrable en 0^+ car elle admet une limite finie en 0^+:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = '' \frac{\infty}{\infty}'' = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\alpha x^\alpha} = 0.$$

Question 2. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{x^m}{m}.$$

2.1) Déterminer la norme de f_m dans $L^1([-1,1])$, $L^2([-1,1])$ et dans $L^\infty([-1,1])$

2.2) $\boxed{\text{2BM}}$ On considère la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} f_m.$$

a) Sur quel intervalle I de $\mathbb{R}$ la série converge-t-elle (convergence ponctuelle)? (intervalle le plus grand possible.)

b) Etudier la convergence uniforme de cette série sur I et sur ses sous-intervalles.

c) Etudier la convergence de la série dans $L^1([-1,1])$ et dans $L^2([-1,1])$.

Solution. 2.1) Pour tout m, la fonction f_m est continue sur $[-1,1]$. Elle appartient donc à chacun des espaces considérés et on a

$$\begin{aligned}
\|f_m\|_\infty &= \sup_{x\in[-1,1]} |f_m(x)| = \frac{1}{m} \\
\|f_m\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_m(x)|\, dx = \frac{2}{m}\int_0^1 x^m\, dx = \frac{2}{m(m+1)} \\
\|f_m\|_2 &= \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_m(x)|^2\, dx} = \frac{\sqrt{2}}{m}\sqrt{\int_0^1 x^{2m}\, dx} = \frac{\sqrt{2}}{m\sqrt{2m+1}}.
\end{aligned}$$

2.2) a) Par le critère du quotient (par exemple), on obtient immédiatement qu'en tout réel de module strictement inférieur à 1, la série est convergente (elle est même absolument convergente) et qu'en tout réel de module strictement supérieur à 1, elle ne converge pas. En 1, il s'agit de la série harmonique; elle est donc divergente. En -1, il s'agit de la série harmonique alternée; elle est donc convergente (mais pas absolument convergente). La réponse est donc l'intervalle $[-1,1[$.

b) La série est uniformément convergente sur tout intervalle du type $[-1, r]$, avec $0 < r < 1$ (et donc tous ceux qui y sont inclus) car

$$\sup_{x\in[-1,0]}\left|\sum_{m=p}^{q} f_m(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{m=p}^{q}(-1)^m\frac{x^m}{m}\right| \leq \sup_{x\in[0,1]}\frac{x^p}{p} \leq \frac{1}{p} \to 0 \text{ si } p \to +\infty$$

et

$$\sup_{x\in[0,r]}\left|\sum_{m=p}^{q} f_m(x)\right| \leq \sum_{m=p}^{q}\frac{r^m}{m} \to 0 \text{ si } p \to +\infty$$

car $r = |r| < 1$.

Par contre, la série n'est pas uniformément convergente sur $[-1, 1[$ car, par exemple, comme toute somme partielle est continue sur $[-1, 1[$, on obtient

$$\sup_{x\in[-1,1[}\left|\sum_{m=1}^{M} f_m(x)\right| = \sup_{x\in[-1,1]}\left|\sum_{m=1}^{M} f_m(x)\right| \geq \sum_{m=1}^{M} f_m(1) = \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} \to +\infty \text{ si } M \to +\infty.$$

c) La convergence dans les espaces de type L^1 et L^2 est directe vu les calculs du point 2.1) et vue le fait que ces espaces sont de Banach: la série converge dans chacun de ces espaces car elle y est de Cauchy. De fait

$$\left\|\sum_{m=p}^{q} f_m\right\|_1 \leq \sum_{m=p}^{q}\|f_m\|_1 = \sum_{m=p}^{q}\frac{2}{m(m+1)} \to 0 \text{ si } p, q \to +\infty$$

et

$$\left\|\sum_{m=p}^{q} f_m\right\|_2 \leq \sum_{m=p}^{q}\|f_m\|_2 = \sum_{m=p}^{q}\frac{\sqrt{2}}{m\sqrt{2m+1}} \to 0 \text{ si } p, q \to +\infty$$

Question 3. Comparer les espaces $L^1([-1, 1])$, $L^2([-1, 1])$ et $L^\infty([-1, 1])$ vis-à-vis de l'inclusion. Comparer également les normes (en termes d'inégalités entre celles-ci).

Solution. Comme toute constante est intégrable sur un ensemble borné fermé, comme

$$|f| = |f|\chi_{[-1,1]} \leq \frac{|f|^2+1}{2} \text{ pp sur } [-1, 1] \quad \text{et} \quad |f|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \text{ pp sur } [-1, 1]$$

on obtient directement

$$L^\infty([-1, 1]) \subset L^2([-1, 1]) \subset L^1([-1, 1]).$$

Ces inclusions sont strictes car, par exemple, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ appartient à $L^1([-1, 1])$ mais pas à $L^2([-1, 1])$ et $x \mapsto \frac{1}{|x|^{1/4}}$ appartient à $L^2([-1, 1])$ mais pas à $L^\infty([-1, 1])$.

On a également (Cauchy-Schwarz pour la première inégalité)

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx \leq \sqrt{2}\|f\|_2 \leq 2\|f\|_\infty$$

quel que soit $f \in L^\infty([-1, 1])$.

Question 4. Si cela a un sens, déterminer la transformée de Fourier $(-)$ dans L^1 de la fonction suivante

$$f(x) = e^{-2\pi|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{4\pi^2+x^2}dx.$$

Solution. La fonction donnée est intégrable dans $\mathbb{R}$ car elle est continue et $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$. Cela étant, comme la fonction est paire, on obtient directement, quel que soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^- f = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\, dx &= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-2\pi x} dx \\
&= 2\Re \int_0^{+\infty} e^{-ixy} e^{-2\pi x} dx \\
&= 2\Re \frac{1}{iy+2\pi} = 2\Re \frac{2\pi - iy}{y^2+4\pi^2} \\
&= \frac{4\pi}{y^2+4\pi^2}.
\end{aligned}$$

Cela étant, on a directement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4\pi^2+x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{4\pi^2+x^2} dx = \frac{1}{8\pi}\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}^- f = \frac{1}{4} f(1) = \frac{e^{-2\pi}}{4}.$$

Quesion 5. On donne la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \textbf{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \textbf{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \textbf{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de cette fonction dans $L^2([-\pi,\pi])$ en simplifiant la réponse au maximum.
b) En déduire que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Solution. La base orthonormée traditionnelle de Fourier de $L^2([-\pi,\pi])$ (sous forme d'exponentielles) est donnée par la suite

$$e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx},\ m \in \mathbb{Z}.$$

Les coefficients de la décomposition de f dans cette base sont (on se sert du fait que f est impair) $< f, e_0 >= 0$ et, si m n'est pas nul,

$$< f, e_m >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin(mx) dx = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^m - 1}{m} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est pair} \\ \frac{-4i}{m\sqrt{2\pi}} & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

a) et b) s'ensuivent directement: le développement de Fourier est

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{-4i}{2m+1} e^{i(2m+1)x} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4i}{2m+1} e^{-i(2m+1)x} \\
&= \frac{2i}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{-e^{i(2m+1)x} + e^{-i(2m+1)x}}{2m+1} \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}
\end{aligned}$$

et

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |< f, e_m >|^2 = \frac{16}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

d'où l'on obtient

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Question 6. $\boxed{\textbf{2BP}}$ **a) Si γ désigne la circonférence centrée à l'origine, de rayon 2 et orientée dans le sens trigonométrique, calculer**

$$\int_\gamma z dz, \quad \int_\gamma \overline{z} dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z} dz.$$

b) Si γ' désigne la circonférence centrée en i, de rayon 2 et orientée dans le sens trigonométrique, calculer

$$\int_{\gamma'} z dz, \quad \int_{\gamma'} \overline{z} dz, \quad \int_{\gamma'} \frac{1}{z-i} dz.$$

Solution. Explicitement, on a $\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ et $\gamma'(t) = i + 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Cela étant, le calcul direct des intégrales curvilignes de $\overline{z}$ donne (repasser à la définition)

$$\int_\gamma \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}\ 2ie^{it} dt = 8i\pi, \quad \int_{\gamma'} \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} (-i + 2e^{-it})\ 2ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}\ 2ie^{it} dt = 8i\pi.$$

Pour les intégrales curvilignes de z, on peut soit aussi directement repasser à la définition, soit invoquer le fait qu'il s'agit d'intégrales de fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ sur des chemins homotopes à des chemins constants; les intégrales sont nulles.

Pour les deux dernières intégrales, on peut aussi soit directement repasser à la définition, soit invoquer la représentation intégrale de Cauchy. On trouve $2i\pi$ dans chaque cas.