2ème année de bachelier en mathématique et en physique
Analyse II
Interrogation du 16 octobre 2007
—
Solutions

Question 1) a) La fonction $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
b) Examiner l'intégrabilité de

$$\frac{\ln x}{1+x^\alpha}$$

sur $]0,+\infty[$ pour toutes les valeurs du réel strictement positif α. Justifier votre réponse.
c) En justifiant vos démarches, montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\int_0^x \frac{\sin y}{y}dy\right)\ dx \ = \ \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin x}{x}\ dx$$

pour tout réel strictement positif p.

Solution. a) La fonction $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc

$$\operatorname{arctg} x \geq \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \forall x \geq 1.$$

Comme une constante non nulle n'est pas intégrable sur un intervalle non borné, la fonction arctg n'est donc pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ quel que soit $\alpha > 0$.

Quel que soit $\alpha > 0$, on a $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 0$. Elle est donc est intégrable en 0 quel que soit $\alpha > 0$.

Elle est intégrable en $+\infty$ lorsque $\alpha > 1$ car $\frac{1+\alpha}{2} > 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1+\alpha}{2}}\ f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\ \frac{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}{x^\alpha}\ \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}{x^\alpha}\ \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{(\alpha-1)/2}} = 0.$$

Elle n'est pas intégrable en $+\infty$ si $\alpha \leq 1$ car

$$\lim_{x\to+\infty} x\ f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\ x^{1-\alpha}\ \ln x = +\infty.$$

b) Si on peut permuter l'ordre d'intégration, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\int_0^x \frac{\sin y}{y}dy\right)\ dx \ &= \ \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\ \left(\int_y^{+\infty} e^{-px}\ dx\right)\ dy \\
&= \ \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\ \frac{e^{-py}}{p}\ dy \\
&= \ \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin x}{x}\ dx
\end{aligned}$$

On peut effectivement permuter l'ordre d'intégration car la fonction $(x,y) \mapsto e^{-px}\frac{\sin y}{y}$ est intégrable sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ y < x\}$. De fait, on peut appliquer le théorème de Tonelli:
- la fonction $(x,y) \mapsto e^{-px}\frac{\sin y}{y}$ est continue sur A
- la fonction que $x \mapsto e^{-px}$ est intégrable sur $]y,+\infty[$ quel que soit $y > 0$
- la fonction

$$y \mapsto \frac{|\sin y|}{y}\int_y^{+\infty} e^{-px}dx = \frac{1}{p}\frac{|\sin y|}{y}e^{-py}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle, admet une limite finie en 0 et est majorée par la fonction $y \mapsto p^{-1}e^{-py}$, fonction intégrable en $+\infty$.

Question 2) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ soient les fonctions f_m, g_m définies par

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\chi_{[-m,m]}(x),\ x \in \mathbb{R}; \qquad g_m(x) = m^{3/2}xe^{-mx},\ x \in [0, +\infty[.$$

a) Pour tout m, déterminer à quels espaces $L^1, L^2, L^\infty(\mathbb{R})$ appartient la fonction f_m et en calculer les normes correspondantes.
b) Pour tout m, déterminer à quels espaces $L^1, L^2, L^\infty([0, +\infty[)$ appartient la fonction g_m et en calculer les normes correspondantes.
c) Etudier la convergence ponctuelle des suites f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$.
d) Etudier la convergence de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ dans chacun des espaces $L^1, L^2, L^\infty(\mathbb{R})$.
e) Etudier la convergence de la suite g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ dans chacun des espaces $L^1, L^2, L^\infty([0, +\infty[)$.
Justifier toutes vos réponses.

Solution. a) Quel que soit m, la fonction f_m est la fonction caractéristique (à un multiple près) d'un intervalle compact; elle est donc intégrable, bornée partout et de carré intégrable. On a aussi directement

$$\|f_m\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_m(x)|dx = 2, \quad \|f_m\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f_m(x)|^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{m}}, \quad \|f\|_\infty = \frac{1}{m}.$$

b) Quel que soit m, la fonction g_m est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $[0, +\infty[$ et est bornée sur $[0, +\infty[$ (elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'étude de sa dérivée montre qu'elle admet un maximum global sur $[0, +\infty[$ en $1/m$). On a

$$\sup_{x\geq 0} |g_m(x)| = \|g_m\|_{L^\infty([0,+\infty[)} = \sup_{x\geq 0} g_m(x) = g_m(\frac{1}{m}) = \frac{\sqrt{m}}{e}.$$

Comme elle est continue sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{x\to+\infty} x^2 g_m(x) = 0$, elle est intégrable sur $[0, +\infty[$. Etant bornée et intégrable, elle est aussi de carré intégrable; elle est donc dans $L^2([0, +\infty[)$.

Les normes sont respectivement

$$\sup_{x\geq 0} |g_m(x)| = \|g_m\|_{L^\infty([0,+\infty[)} = \sup_{x\geq 0} g_m(x) = g_m(\frac{1}{m}) = \frac{\sqrt{m}}{e}$$

$$\|g_m\|_1 = \int_0^{+\infty} |g_m(x)|\ dx \ = \ \frac{1}{\sqrt{m}}$$

et

$$\|g_m\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} |g_m(x)|^2\ dx} \ = \ \frac{1}{2}$$

c) Si $x \in \mathbb{R}$, alors $|x| \leq m$ pour tout m suffisamment grand; il s'ensuit que $f_m(x) = \frac{1}{m}$ pour ces m donc $\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = 0$ et la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge donc ponctuellement sur $\mathbb{R}$ vers 0.

Si $x = 0$ alors $g_m(x) = 0$ pour tout m. Si $x > 0$, vu les propriétés de la fonction exponentielle, on a $\lim_{m\to+\infty} m^{3/2}e^{-mx} = 0$; il s'ensuit que $\lim_{m\to+\infty} g_m(x) = 0$. La suite g_m converge donc ponctuellement sur $[0, +\infty[$ vers 0.

d) La suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge ponctuellement vers 0; si elle converge dans L^1 (resp. L^2, L^∞), c'est nécessairement vers 0. Examinons donc la convergence vers 0 des suites numériques

$$\|f_m - 0\|_1 = \|f_m\|_1, \quad \|f_m - 0\|_2 = \|f_m\|_2, \quad \|f_m - 0\|_\infty = \|f_m\|_\infty\ (m \in \mathbb{N}_0).$$

Vu ce qui précède, on a

$$\|f_m\|_1 = 2, \quad \|f_m\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f_m(x)|^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{m}}, \quad \|f_m\|_\infty = \frac{1}{m}.$$

Il s'ensuit que la convergence a lieu dans L^2 et dans L^∞, mais pas dans L^1.

e) La suite g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge ponctuellement vers 0; si elle converge dans L^1 (resp. L^2, L^∞), c'est nécessairement vers 0. Examinons donc la convergence vers 0 des suites numériques

$$\|g_m - 0\|_1 = \|g_m\|_1, \quad \|g_m - 0\|_2 = \|g_m\|_2, \quad \|g_m - 0\|_\infty = \|g_m\|_\infty\ (m \in \mathbb{N}_0).$$

Vu ce qui précède, on a

$$\|g_m\|_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \|g_m\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g_m(x)|^2 dx} = \frac{1}{2}, \quad \|g_m\|_\infty = \frac{\sqrt{m}}{e}.$$

Il s'ensuit que la convergence a lieu dans L^1, mais pas dans L^2 ni dans L^∞.

Question 3) Montrer que $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ **et que** $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ **pour tout** $f \in L^2([0,1])$**.**

Solution. Soit $f \in L^2([0,1])$. On a

$$|f(x)| \leq \frac{|f(x)|^2 + 1}{2} \quad \text{pp sur } [0,1].$$

Dès lors, f est mesurable et de module majoré par une fonction intégrable sur $[0,1]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle. La formule de Cauchy-Schwarz dans $L^2([0,1])$ appliquée aux deux fonctions $|f|$ et $\chi_{[0,1]}$ donne directement

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = \int |f(x)| \ \chi_{[0,1]}(x) \ dx \ \leq \sqrt{\int_0^1 1 dx} \ \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} = \|f\|_2$$