Révisions - Travail dirigé 2 (Solutions)

Solution de l'exercice 1. (1) (a) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction 0. (b) Elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}_0$. Par contre, elle converge uniformément sur tout ensemble borné fermé de $\mathbb{R}_0$ vers 0. (c) Elle ne converge ni dans $L^1(\mathbb{R})$, ni dans $L^2(\mathbb{R})$.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_0$, on a

$$S(x) = \frac{xe^{-x^2/2}}{(1 - e^{-x^2/2})^2}.$$

Solution de l'exercice 2. On a $(g_m \star g_n)(x) = g_{m+n+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 3. (1) La fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, mais est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction est intégrable (et aussi de carré intégrable) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $r > 0$. Pour $r > 0$, on a

$$\mathcal{F}_\xi^- g = 2r \frac{e^{is\xi}}{\xi^2 + r^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(3) La fonction Df est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathcal{F}_\xi^-(Df) = \pi \left(e^{-|\xi|/a} - e^{-|\xi|/b} \right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(4) Pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{F}_\xi^- f = -\frac{i\pi}{\xi} \left(e^{-|\xi|/a} - e^{-|\xi|/b} \right).$$

Solution de l'exercice 4. (1) (a) Comme $u_m \in L^2([- \pi, \pi])$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a $\langle u_k, u_\ell \rangle = 0$ pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ tels que $k \neq \ell$ et $\|u_m\|_2 = \sqrt{\pi}$. (b) On a $\sigma = \pi^4/90$.

(2) Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ (et même pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Solution de l'exercice 5. (1) Comme $(1+i)^i \in \mathbb{C}_0$, on a

$$\ln((1+i)^i) = -\frac{\pi}{4} + i \frac{\ln(2)}{2}.$$

(2) La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (i[-\infty, -1] \cup [1, +\infty[))$. (3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $if(x) = -2 \operatorname{arctg}(x)$.

Solution de l'exercice 6. On a

$$f(z) = -\sum_{m=0}^{+\infty} z^{2m+1}, \quad z \in B(0, 1) \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m}, \quad z \in \mathbb{C}$$

(la fonction g admet un prolongement holomorphe au point 0).

Solution de l'exercice 7. • Fonction f . La fonction f est holomorphe sur

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{ -1, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Elle n'a pas de zéro dans Ω . Elle admet un prolongement holomorphe au point -1 . Les singularités isolées $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ sont des pôles simples. On a

$$\operatorname{Res}_{-1} f = 0, \quad \operatorname{Res}_{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} f = \frac{i}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Res}_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} f = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

- Fonction g . La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}_0$. Elle n'a pas de zéro dans $\mathbb{C}_0$. En développant g en série de Laurent en 0, on a

$$g(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} z^{1-m}, \quad z \in \mathbb{C}_0.$$

La partie régulière h et la partie singulière H du développement sont définies par

$$h(z) = z + 1, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad H(Z) = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m!} Z^{m-1}, \quad Z \in \mathbb{C}$$

et on a $g(z) = h(z) + H(1/z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}_0$. La singularité isolée 0 est essentielle et $\operatorname{Res}_0 g = 1/2$.

- Fonction j . La fonction j est holomorphe sur $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Les zéros de j dans Λ sont les réels $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}_0$ et sont simples. Elle admet un prolongement holomorphe en 0 et $\operatorname{Res}_0 j = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}_0$, $ik\pi$ est un pôle simple et $\operatorname{Res}_{ik\pi} j = -i(-1)^k \sin(ik\pi)$.

Solution de l'exercice 8. Toutes les intégrales sont bien définies. On a $A = 0$, $B = 2i\pi$, $C = 2i$ et $D = i$.

Solution de l'exercice 9. Les deux intégrales sont bien définies. On a $I = \pi$ et $J = \pi/8$.

Solution de l'exercice 10. (1) Vrai. (2) Vrai. (3) Faux en prenant par exemple $f(z) = \sin(z)$. (4) Faux en prenant par exemple $f(z) = 1/z^2$, $z_0 = 0$ et $\Omega = \mathbb{C}_0$.