ANALYSE II – 2ème BMP
Ajout au sujet de la transformée de Fourier dans L^2
Cf cours du jeudi 30 octobre 2008

Transformée de Fourier dans L^2 et produit de composition.

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et si $h \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ alors

$$F^{\pm}(f * h) = F^{\pm}F\ \mathcal{F}^{\pm}h.$$

Preuve. Si φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite de $L^1 \cap L^2$ qui converge dans L^2 vers f, alors la suite $\varphi_m * h$ ($m \in \mathbb{N}_0$) de $L^1 \cap L^2$ converge dans L^2 vers $f * h$ donc

$$F^{\pm}(f * h) = \lim_m F^{\pm}(\varphi_m * h) = \lim_m \mathcal{F}^{\pm}(\varphi_m * h) = \lim_m \left(\mathcal{F}^{\pm}\varphi_m\ \mathcal{F}^{\pm}h\right) = F^{\pm}f\ \mathcal{F}^{\pm}h$$

car si G_m converge dans L^2 vers G alors $G_m B$ converge aussi dans le même espace vers GB pour toute fonction $B \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.□

Soit la gaussienne

$$g(x) = e^{-|x|^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Pour rappel, on a

$$\mathcal{F}^{\pm}_y g = \pi^{n/2} g(y/2),\ y \in \mathbb{R}.$$

Régularité du produit de composition.

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la fonction $f * g$ est de classe C_∞ dans $\mathbb{R}^n$ et on a

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g.$$

Si en outre $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq L$ alors

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g \quad |\alpha| \leq L.$$

Preuve. Il s'agit d'une application du théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

Les hypothèses "naturelles" de ce théorème sont aisément vérifiées pour la fonction (x est la variable d'intégration et y le paramètre)

$$(x, y) \mapsto f(x)g(y - x).$$

Cela étant, soit un compact K de $\mathbb{R}^n$. Pour tout multi-indice α, on a

$$D^\alpha_y g(y - x) = (-2)^\alpha (y - x)^\alpha g(y - x)$$

donc

$$\sup_{y \in K} \left|D^\alpha_y g(y - x)\right| \leq C(1 + |x|)^{|\alpha|} e^{-|x|^2}.$$

Comme le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable, on obtient une fonction intégrable "fixe" qui donne l'estimation voulue pour la vérification des hypothèses des intégrales paramétriques.

Lorsque la fonction f est en outre régulière, à dérivées dans L^2, des intégrations par parties successives conduisent à

$$f * D^\alpha g = D^\alpha f * g.\square$$

Transformée de Fourier dans L^2 et dérivation.

Si $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq L$ alors

$$F^{\pm}_y(D^\alpha f) = (\pm iy)^\alpha F^{\pm}_y f \quad |\alpha| \leq L.$$

Preuve. Vu ce qui précède, on a

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g)$$

donc

$$F^{\pm}_y \Big((D^\alpha f) * g\Big) = \left(F^{\pm}_y(D^\alpha f)\right)\ \mathcal{F}^{\pm}_y g = \left(F^{\pm}_y f\right)\ \mathcal{F}^{\pm}_y(D^\alpha g) = F^{\pm}_y f\ (\pm iy)^\alpha \mathcal{F}^{\pm}_y g.$$

Puisque la tranformée de Fourier de f ne s'annule en aucun point, on conclut.□

FB, November 13, 2008