Analyse II, partie 1 – Espaces $\mathrm{L}^1(E)$, $\mathrm{L}^2(E)$ et $\mathrm{L}^\infty(E)$

Exercice 1. (a) Etablir que la fonction $x \mapsto \sin(mx)$ appartient à $\mathrm{L}^1([0,2\pi])$, $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$ et $\mathrm{L}^\infty([0,2\pi])$, mais que ses normes dans ces différents espaces sont distinctes.

(b) Déterminer la norme $\|\chi_{\mathbb{Q}}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}$.

(c) Donner un exemple de fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la norme est 1.

Exercice 2. On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-|x|} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \cos(2\pi x).$$

(a) Déterminer si possible les normes de f et g dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Même question pour g dans $\mathrm{L}^1([0,1])$, $\mathrm{L}^2([0,1])$ et $\mathrm{L}^\infty([0,1])$.

(c) Calculer si possible le produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ des fonctions ifg et if.

Exercice 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^{3/2} x e^{-mx}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer à quels espaces $\mathrm{L}^1([0,+\infty[)$, $\mathrm{L}^2([0,+\infty[)$, $\mathrm{L}^\infty([0,+\infty[)$ appartient la fonction f_m et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) sur $[0,+\infty[$.

(c) Etudier la convergence de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) dans chacun des espaces $\mathrm{L}^1([0,+\infty[)$, $\mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ et $\mathrm{L}^\infty([0,+\infty[)$.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\chi_{[-m,m]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer à quels espaces $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ appartient la fonction f_m et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) sur $\mathbb{R}$.

(c) Etudier la convergence de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) dans chacun des espaces $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = e^{-2x}\,\frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer (si possible) la norme de f_m dans $\mathrm{L}^1([0,+\infty[)$, $\mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ et $\mathrm{L}^\infty([0,+\infty[)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

(b) On définit la suite de sommes partielles

$$F_M = \sum_{m=0}^{+\infty} f_m \quad (M \in \mathbb{N}_0).$$

(1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite F_M ($M \in \mathbb{N}_0$) sur $[0, +\infty[$ ainsi que la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ et sur tout compact de $[0, +\infty[$.

(2) Etudier la convergence de la suite F_M ($M \in \mathbb{N}_0$) dans $\mathrm{L}^1([0, +\infty[)$ et $\mathrm{L}^2([0, +\infty[)$.

Exercice 6. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

(a) Si on a $f_m \to f$ dans $\mathrm{L}^1(E)$ et $g_m \to g$ dans $\mathrm{L}^\infty(E)$, montrer que $f_m g_m \to fg$ dans $\mathrm{L}^1(E)$.

(b) Si on a $f_m \to f$ dans $\mathrm{L}^2(E)$ et $g_m \to g$ dans $\mathrm{L}^2(E)$, montrer que $f_m g_m \to fg$ dans $\mathrm{L}^1(E)$.

Exercice 7. Comparer les espaces $\mathrm{L}^1([-1, 1])$, $\mathrm{L}^2([-1, 1])$ et $\mathrm{L}^\infty([-1, 1])$ vis-à-vis de l'inclusion. Comparer également les normes (en termes d'inégalités entre celles-ci).

Exercice 8. Montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f \in \mathrm{C}_0([a, b]) \cap \mathrm{C}_1(]a, b[)$ et si $Df \in \mathrm{L}^2(]a, b[)$, démontrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b - a)\|Df\|^2_{\mathrm{L}^2(]a,b[)}.$$

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite δ_n ($n \in \mathbb{N}_0$).

(b) Les fonctions δ_n sont-elles dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et/ou dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite dans les espaces auxquels les fonctions appartiennent.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\, dx = 1.$$

(d) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2m+1)x)}{\sin(x)}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

L. Simons & F. Bastin – 30 septembre 2010.