2ème année de bachelier en mathématique

Analyse II

Examen écrit de première session, 14 janvier 2009; durée: 3h45

Justifier chaque fois vos réponses

1. Espaces L^1 et L^2.

   (a) Soit $\alpha \geq 0$ et soit la fonction $\dfrac{\ln x^\alpha}{1+x^{2\alpha}}$, $x > 0$. Pour quelles valeurs de α cette fonction est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

   (b) La fonction f définie explicitement par $f(x) = \ln(|x-1|)$ est-elle intégrable sur $[0,1]$, sur $]1,+\infty[$?

   (c) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $[0,e]$ et calculer sa norme dans $L^1([0,e])$.

   (d) Montrer que la fonction f définie explicitement par

   $$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$$

   appartient à $L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$ et à $L^2([1,+\infty[) \setminus L^1([1,+\infty[)$.
   (*Suggestion:* calculer $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$).

2. Déterminer, si possible, le produit de composition des fonctions f et g suivantes

   $$f(x) = x, \quad g(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

3. Transformées de Fourier.

   (a) Montrer que la fonction f définie par

   $$f(x) = e^{-|x|}\cos x$$

   est intégrable sur $\mathbb{R}$ et déterminer ensuite sa transformée de Fourier (-).

   (b) Montrer que la fonction g définie par

   $$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   est un élément de $L^2(\mathbb{R})$ et en déterminer ensuite la transformée de Fourier (-).

4. Séries trigonométriques de Fourier.

   (a) On se place dans l'espace $L^2([-1,1])$ muni du produit scalaire habituel. Déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m suivantes, quelle que soit la valeur du naturel (positif ou nul) m

   $$f(x) = \cos(\pi x), \quad g_m(x) = \cos(\pi m x).$$

   (b) Dans l'espace $L^2([-1,1])$ on a le développement suivant

   $$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

   En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.