

Justifier chaque fois vos réponses

THEORIE

1. Définir la notion de produit de composition de deux fonctions.
2. Que peut-on dire du produit de composition de deux fonctions intégrables dans $\mathbb{R}$? (Enoncé et démonstration.)
3. Expliquer comment on définit la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$. (Expliquer clairement les démarches en énonçant les propriétés utilisées.)

EXERCICES

1. Pour tout naturel strictement positif m , on donne la fonction

$$f_m(x) = me^{-m^2x}, \quad x > 0.$$

- a) Etant donné m , la fonction f_m appartient-elle à l'espace $L^1(]0, +\infty[)$ (resp. $L^2(]0, +\infty[)$, $L^\infty(]0, +\infty[)$) ? Pourquoi ?
 - b) Etudier la convergence ponctuelle sur $]0, +\infty[$ (resp. uniforme sur $]0, +\infty[$ et $[r, +\infty[$ avec $r > 0$) de cette suite.
 - c) Examiner la convergence dans $L^1(]0, +\infty[)$ (resp. $L^2(]0, +\infty[)$) de cette suite.
2. a) On donne les fonctions f et g suivantes

$$f(x) = e^{-x}\chi_{]0, +\infty[}(x), \quad g(x) = \frac{1}{1+ix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) En spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou dans L^2 , déterminer la transformée de Fourier négative de la fonction f et la transformée de Fourier positive de la fonction g .
 - b) Comment obtenir directement les deux autres transformées ?
3. Montrer que $L^2([0, 1]) \subset L^1([0, 1])$ et que $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ quel que soit $f \in L^2([0, 1])$.
 4. On donne les fonctions F et G par

$$F(x) = x, \quad G(x) = e^{-x}\chi_{]0, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si c'est possible, déterminer le produit de composition de ces deux fonctions.

Justifier chaque fois vos réponses**EXERCICES POUR TOUS (durée : 1h30)**

1. On donne la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de cette fonction dans $L^2([-\pi, \pi])$ en simplifiant la réponse au maximum.
 b) En déduire que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. On donne les fonctions
- F
- et
- G
- suivantes

$$F(z) = \frac{1}{z^4 + 1}, \quad G(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}.$$

- a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
 b) Quelles sont leurs singularités isolées ? De quel type sont-elles ?
 c) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
 3. On considère les chemins γ, γ' , respectivement paramétrages injectifs des circonférences centrées en i , en $1+i$ et de rayon 1. On suppose aussi que l'on parcourt ces circonférences dans le sens trigonométrique. On demande de déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$a) \int_{\gamma} \bar{z} dz, \quad b) \int_{\gamma} \frac{1}{z + \frac{1}{2} - i} dz, \quad c) \int_{\gamma'} \frac{1}{z + \frac{1}{2} - i} dz, \quad d) \int_{\gamma'} \frac{1}{(z + \frac{1}{2} - i)^2} dz.$$

EXERCICES pour ceux qui n'ont pas réussi l'INTERROGATION DISPENSATOIRE de février (durée : 1h30)

1. On donne les fonctions
- f
- et
- g
- par

$$f(x) = e^{-x} \chi_{]0, +\infty[}, \quad g(x) = \frac{1}{1 - ix}.$$

- a) Les fonctions f et g appartiennent-elles à $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$) ? Si oui, en déterminer la norme.
 b) Si possible, déterminer $f * f$, ainsi que la transformée de Fourier positive de f et de $f * f$.
 c) Montrer que la transformée de Fourier négative de g est nulle sur $] -\infty, 0[$.
 d) Déterminer la norme de la transformée de Fourier positive de f .
 2. On donne la fonction f par $f(x) = (1 - |x|) \chi_{[-1, 1]}(x)$ et pour tout naturel strictement positif m , on pose

$$F_m(x) = f(mx), \quad G_m(x) = mf(mx), \quad H_m(x) = f\left(\frac{x}{m}\right)$$

- a) Examiner la convergence ponctuelle de ces suites sur $\mathbb{R}$.
 b) Examiner la convergence uniforme de ces suites sur $[0, +\infty[$, sur $]0, +\infty[$, et sur les intervalles fermés bornés de $]0, +\infty[$.
 c) Représenter F_m, H_m, G_m pour quelques valeurs de m (dans un même repère orthonormé).
 d) Examiner la convergence de ces suites dans $L^1(]0, +\infty[)$.

2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II
Examen écrit du 1er septembre 2010

Justifier chaque fois vos réponses

1. On donne la fonction f par

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

- a) Cette fonction appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$) ? Si oui, en déterminer la norme.
 - b) Si possible, déterminer $f * f$, ainsi que la transformée de Fourier positive de f et de $f * f$.
2. On donne la suite de fonctions f_m suivante

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1 + m^2 x^2}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

- a) Déterminer l'ensemble des réels A sur lequel cette suite converge ponctuellement, ainsi que sa limite.
 - b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les compacts inclus dans A .
 - c) Si les éléments de la suite donnée appartiennent à $L^1(A)$, étudier la convergence de cette suite dans $L^1(A)$. Même question avec $L^2(A)$.
3. On donne la fonction f par

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

- a) Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, 2\pi])$ en simplifiant la réponse au maximum.
- b) En déduire que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. On donne les fonctions F et G suivantes

$$F(z) = \frac{1}{z^3 + 1}, \quad G(z) = \frac{e^{i/z}}{\cos z}.$$

- a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
 - b) Quelles sont leurs singularités isolées ? De quel type sont-elles ?
 - c) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
5. Soit γ la circonférence centrée en $2i$ et de rayon 1. On considère qu'on parcourt cette circonférence "à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\int_{\gamma} \bar{z} \, dz, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} \, dz, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{2z - 3i} \, dz, \quad \int_{\gamma} \frac{\sin(i\pi z)}{2z - 3i} \, dz$$

Interrogation dispensatoire du 25 février 2013

- L'épreuve dure 2 heures.
- Indiquer sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom ainsi que votre section.
- Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- **Justifier toutes vos réponses.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

THÉORIE

- Question 1.** (1.1) Définir la notion de produit de convolution de deux fonctions définies presque partout sur $\mathbb{R}^n$.
- (1.2) Etudier le produit de convolution d'une fonction intégrable avec une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$ (énoncé et preuve).
- Question 2.** (2.1) Définir les notions de transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et de transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
- (2.2) Énoncer le théorème de Fourier dans ces deux cadres. Dans le cas $L^1(\mathbb{R})$, donner en plus la forme explicite de ce théorème (en faisant intervenir des intégrales).

EXERCICES

Question 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^{3/2} x e^{-mx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (3.1) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $[0, +\infty[$.
- (3.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur les fermés bornés de $]0, +\infty[$.
- (3.3) Etudier la convergence de cette suite dans $L^1([0, +\infty[)$.
- (3.4) Etudier la convergence de cette suite dans $L^2([0, +\infty[)$.

Question 4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (4.1) Déterminer si possible la transformée de Fourier positive de la fonction f .
- (4.2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 dx.$$

Question 5. (5.1) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $v_m(x) = \sin(m\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les éléments de la suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sont orthogonaux deux à deux dans $L^2([-1, 1])$. Calculer la norme dans $L^2([-1, 1])$ de v_m pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

(5.2) Sachant que

$$x = \frac{-2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{\sin(m\pi x)}{m}$$

dans $L^2([-1, 1])$, déduire du point précédent la somme de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Examen écrit du 31 mai 2013

- L'épreuve commence par la seconde partie (i.e. par les questions 6, 7 et 8) qui dure 1 heure. Les étudiants ayant réussi l'interrogation dispensatoire ont alors terminé l'examen écrit. **Les autres doivent ensuite répondre à la première partie (i.e. aux questions 1, 2, 3, 4 et 5) qui dure 2 heures.** La durée totale de l'examen écrit est de 3 heures.
- Indiquer sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom ainsi que votre section.
- Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- **Justifier toutes vos réponses.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

1^{RE} PARTIE – CONVERGENCE DE FONCTIONS & ANALYSE DE FOURIER

Question 1. (1.1) Définir la notion de produit de convolution de deux fonctions définies presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

(1.2) Etudier le produit de convolution de deux fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$ (énoncé et preuve).

Question 2. (2.1) Définir les notions de transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Énoncer le théorème de Fourier dans ce cadre et donner la forme explicite de ce théorème (en faisant intervenir des intégrales).

(2.2) Énoncer et démontrer la propriété relative au comportement à l'infini de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Question 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{mx}{1 + m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3.1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.

(3.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}$ et sur les bornés fermés de $]0, +\infty[$.

(3.3) Etudier la convergence de cette suite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Question 4. (4.1) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x} \chi_{]0, +\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1 - ix}.$$

Déterminer si possible la transformée de Fourier (positive) de la fonction f et la transformée de Fourier (négative) de la fonction g . Préciser dans chacun des cas s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

(4.2) En déduire si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(1 - ix)^2} dx.$$

Question 5. (5.1) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $v_m(x) = \sin(m\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les éléments de la suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sont orthogonaux deux à deux dans $L^2([-1, 1])$. Calculer la norme dans $L^2([-1, 1])$ de v_m pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

(5.2) Sachant que

$$x = \frac{-2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{\sin(m\pi x)}{m}$$

dans $L^2([-1, 1])$, déduire du point précédent la somme de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Examen écrit du 31 mai 2013

- **L'épreuve commence par la seconde partie (i.e. par les questions 6, 7 et 8) qui dure 1 heure.** Les étudiants ayant réussi l'interrogation dispensatoire ont alors terminé l'examen écrit. Les autres doivent ensuite répondre à la première partie (i.e. aux questions 1, 2, 3, 4 et 5) qui dure 2 heures. La durée totale de l'examen écrit est de 3 heures.
- Indiquer sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom ainsi que votre section.
- Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- **Justifier toutes vos réponses.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

2^DE PARTIE – FONCTIONS HOLOMORPHES

Question 6. Soient les fonctions f et g (d'une variable complexe) définies par

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3+1} \quad \text{et} \quad g(z) = z e^{\frac{1}{z}}.$$

- (6.1) Déterminer le domaine d'holomorphie de ces deux fonctions.
- (6.2) Quelles sont les singularités isolées de ces fonctions? De quel type sont-elles?
- (6.3) Déterminer le résidu de ces fonctions en chacune de leur singularité isolée.
- (6.4) Pour la fonction g , déterminer son développement de Laurent en chacune de ses singularités isolées. Préciser ses parties régulière et singulière.

Question 7. Soit γ un chemin fermé simple régulier (orienté « aire à gauche ») qui décrit le cercle centré en $2i$ et de rayon 1.

- (7.1) Calculer si possible la valeur des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\gamma} \Im z \, dz \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) dz.$$

- (7.2) Déterminer si possible la partie réelle de la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{\ln(z)}{2z-3i} dz.$$

Question 8. La fonction cosinus est-elle bornée sur $\mathbb{C}$? Justifier.

Examen écrit du 5 septembre 2013

- L'épreuve commence par la seconde partie (i.e. par les questions 6, 7 et 8) qui dure 1 heure. Les étudiants ayant réussi l'interrogation dispensatoire ont alors terminé l'examen écrit. **Les autres doivent ensuite répondre à la première partie (i.e. aux questions 1, 2, 3, 4 et 5) qui dure 2 heures.** La durée totale de l'examen écrit est de 3 heures.
- Indiquer sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom ainsi que votre section.
- Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- **Justifier toutes vos réponses.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

1^{RE} PARTIE – CONVERGENCE DE FONCTIONS & ANALYSE DE FOURIER

Question 1. (1.1) Définir la notion de produit de convolution de deux fonctions définies presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

(1.2) Etudier le produit de convolution de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$ (énoncé et preuve).

Question 2. (2.1) Définir les notions de transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et de transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2.2) Donner une condition suffisante pour que les transformées de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ d'une (même) fonction soient égales (presque partout). Justifier.

(2.3) Énoncer le théorème de Fourier dans ces deux cadres. Dans le cas $L^1(\mathbb{R})$, donner en plus la forme explicite de ce théorème (en faisant intervenir des intégrales).

Question 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{mx}{1 + m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3.1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.

(3.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}$ et sur les bornés fermés de $]0, +\infty[$.

(3.3) Etudier la convergence de cette suite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Question 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-a|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(4.1) Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Déterminer alors sa transformée de Fourier positive.

(4.2) Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{x(a^2 + x^2)} dx.$$

Question 5. (5.1) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $v_m(x) = \sin(m\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les éléments de la suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sont orthogonaux deux à deux dans $L^2([-1, 1])$. Calculer la norme dans $L^2([-1, 1])$ de v_m pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

(5.2) Sachant que

$$x = \frac{-2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{\sin(m\pi x)}{m}$$

dans $L^2([-1, 1])$, déduire du point précédent la somme de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Examen écrit du 5 septembre 2013

- **L'épreuve commence par la seconde partie (i.e. par les questions 6, 7 et 8) qui dure 1 heure.** Les étudiants ayant réussi l'interrogation dispensatoire ont alors terminé l'examen écrit. Les autres doivent ensuite répondre à la première partie (i.e. aux questions 1, 2, 3, 4 et 5) qui dure 2 heures. La durée totale de l'examen écrit est de 3 heures.
- Indiquer sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom ainsi que votre section.
- Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- **Justifier toutes vos réponses.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

2^{DE} PARTIE – FONCTIONS HOLOMORPHES

Question 6. Soient les fonctions f et g (d'une variable complexe) définies par

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3+1} \quad \text{et} \quad g(z) = z \sin\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

- (6.1) Déterminer le domaine d'holomorphie de ces deux fonctions.
- (6.2) Quelles sont les singularités isolées de ces fonctions? De quel type sont-elles?
- (6.3) Déterminer le résidu de ces fonctions en chacune de leur singularité isolée.
- (6.4) Pour la fonction g , déterminer son développement de Laurent en chacune de ses singularités isolées. Préciser ses parties régulière et singulière.

Question 7. Soit γ un chemin fermé simple régulier (orienté « aire à gauche ») qui décrit le cercle centré en i et de rayon 1.

- (7.1) Calculer si possible la valeur des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\gamma} \Im z \, dz \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\gamma} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz.$$

- (7.2) Déterminer si possible la partie réelle de la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{\ln(z)}{2z-3i} dz.$$

Question 8. La fonction cosinus est-elle bornée sur $\mathbb{C}$? Justifier.

Examen écrit du 5 septembre 2013

- L'épreuve dure 3 heures.
- Indiquer sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom ainsi que votre section.
- Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- **Justifier toutes vos réponses.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Question 1. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{mx}{1 + m^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (1.1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.
- (1.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}$ et sur les bornés fermés de $]0, +\infty[$.
- (1.3) Etudier la convergence de cette suite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Question 2. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$g_m(x) = \frac{e^x x^m}{m!} \chi_{]0, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$, calculer si possible le produit de convolution $g_m \star g_n$ (en tout point de $\mathbb{R}$) et montrer que celui-ci est en fait la fonction g_k pour un naturel non nul k à déterminer.

Question 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-a|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (3.1) Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Déterminer alors sa transformée de Fourier positive.
- (3.2) Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{x(a^2 + x^2)} dx.$$

Question 4. (4.1) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $v_m(x) = \sin(m\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les éléments de la suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sont orthogonaux deux à deux dans $L^2([-1, 1])$. Calculer la norme dans $L^2([-1, 1])$ de v_m pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

(4.2) Sachant que

$$x = \frac{-2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{\sin(m\pi x)}{m}$$

dans $L^2([-1, 1])$, déduire du point précédent la somme de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Question 5. Soit f une fonction réelle continûment dérivable sur $[0, 2\pi]$ telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. Montrer que

$$\|f\|_{L^2([0, 2\pi])} \leq \|Df\|_{L^2([0, 2\pi])}.$$

Examen écrit du 6 janvier 2014

- L'épreuve dure 3h30.
- Indiquer sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom ainsi que votre section.
- Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- **Justifier toutes vos réponses.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Question 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n \frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (1.1) Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge-t-elle (a) ponctuellement sur $\mathbb{R}$, (b) uniformément sur $\mathbb{R}$, (c) uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_0$, (d) dans $L^1(\mathbb{R})$, (e) dans $L^2(\mathbb{R})$?
- (1.2) Dans la suite, on suppose que $\alpha = 1$.
- (a) Montrer que la fonction

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_0$.

- (b) Calculer $S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$. En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.

Question 2. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$g_m(x) = \frac{e^x x^m}{m!} \chi_{]0, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$, calculer si possible le produit de convolution $g_m \star g_n$ (en tout point de $\mathbb{R}$) et montrer que celui-ci est en fait la fonction g_k pour un $k \in \mathbb{N}_0$ à déterminer.

Question 3. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a > 0$, soit la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (3.1) La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$?
- (3.2) Déterminer si possible la transformée de Fourier de la fonction Df .
- (3.3) En déduire si possible la transformée de Fourier de la fonction f .

Préciser dans chacun des cas s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Question 4. (4.1) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $u_m(x) = \cos(mx)$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que les éléments de la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sont orthogonaux deux à deux dans $L^2([-\pi, \pi])$. Calculer la norme dans $L^2([-\pi, \pi])$ de u_m pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Sachant que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx)$$

dans $L^2([-\pi, \pi])$, déduire du point précédent la somme de la série

$$\sigma = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$

- (4.2) Développer si possible la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ en série trigonométrique de Fourier dans l'espace $L^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.