UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences

EXERCICES d'ANALYSE MATHEMATIQUE

Notes du cours de la seconde candidature
en sciences mathématiques et
en sciences physiques

F.BASTIN – J.-P. SCHNEIDERS

Septembre 1992

EDITION PROVISOIRE

Introduction

Ce cahier d'exercices est destiné aux étudiants de seconde candidature en sciences mathématiques et physiques. Il a pour but de compléter le cours d'analyse du Professeur J. Schmets et à servir de base aux séances de travaux pratiques.

Les exercices sont nombreux et ont un degré de difficulté très variable. Certains sont uniquement destinés à aider l'étudiant à acquérir les automatismes de base pour la manipulation des différents concepts introduits dans la partie théorique du cours. D'autres ne sont pas à proprement parler des exercices mais plutôt des applications de la théorie à la résolution de problèmes concrets. Leur but est de mettre en évidence comment tirer parti des méthodes enseignées dans des situations en relation directe avec la pratique.

La plupart des exercices sont fournis avec leur solution détaillée, ceci afin que l'étudiant qui désire travailler par lui-même puisse contrôler ses résultats. Il va sans dire que seule la recherche personnelle des solutions peut faire progresser dans la connaissance de la matière et que ces solutions ne devraient être utilisées que comme contrôle.

L'origine des exercices est très variée. La plupart proviennent des livres classiques d'analyse cités dans la bibliographie. Dans de nombreux cas, ils ont été modifiés pour s'intégrer dans le cadre du cours et parfois leurs solutions ont été simplifiées par des arguments originaux.

Nous pensons que le but principal d'un cahier d'exercices est d'aider l'étudiant à maîtriser la matière du cours. Pour atteindre ce but, la collaboration des étudiants est nécessaire. Nous sommes donc ouverts à toute suggestion concernant l'incorporation de nouveaux exercices ou la considération de nouveaux problèmes entrant dans le cadre du cours.

Nos plus vifs remerciements vont à M. A. Garcet et Mme J. Lombet pour leur aide lors de la relecture des épreuves.

Pour terminer, nous voudrions également remercier Mme N. Dumont pour le soin qu'elle a apporté à l'encodage en TEX de notre manuscrit.

Liège, septembre 1990

F. Bastin — J.-P. Schneiders

Chapitre 1

Espaces métriques et normés

Exercice 1.1 Par définition, un ensemble est infini s'il est en bijection avec l'une de ses parties propres; un ensemble est fini s'il n'est pas infini.

a) Si A est un ensemble fini et non vide, toute injection de A dans A est une bijection.

b) Si A est un ensemble qui contient une suite de points deux à deux distincts, alors A est infini.

Solution:

a) Si $f : A \to A$ est injectif mais non surjectif, alors $f(A)$ est une partie propre de A et $g : A \to f(A)$ $a \mapsto f(a)$ est une bijection. D'où la conclusion.

b) Soit $D := \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ une partie de A telle que $x_m \neq x_n$ si $m \neq n$. Posons $B := A \backslash \{x_1\}$ et définissons $f : A \to B$ par $f(a) = a$ si $a \in A \backslash D$ et $f(x_m) = x_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Dès lors A est infini car f est une bijection et B est une partie propre de A. □

Exercice 1.2 Donner l'expression d'une bijection entre $[0, 1[$ et $]0, 1[$.

Solution: L'application $T : [0, 1[\to]0, 1[$ définie par

$$T(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1/2 & \text{si} & x = 0 \\ 1/(m+1) & \text{si} & x = 1/m \\ x & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

est une bijection entre les intervalles $[0, 1[$ et $]0, 1[$. □

Exercice 1.3 Soit (X,d) un espace métrique.

a) Pour toute partie A de X et tout ouvert Ω on a $(\Omega\cap A)^- = (\Omega\cap A^-)^-$.

b) Une partie D de X est partout dense si et seulement si D rencontre tout ouvert non vide de X.

c) Si A, B et A_j $(j\in J)$ sont des parties de X, on a

$$\begin{array}{lclclcl} (A\cap B)^\circ &=& A^\circ\cap B^\circ & \quad & (A\cup B)^- &=& A^-\cup B^- \\ A^\circ\cup B^\circ &\subset& (A\cup B)^\circ & & (A\cap B)^- &\subset& A^-\cap B^- \\ (\bigcap_{j\in J} A_j)^\circ &=& (\bigcap_{j\in J} A_j^\circ)^\circ & & (\bigcup_{j\in J} A_j)^- &=& (\bigcup_{j\in J} A_j^-)^-. \end{array}$$

d) Si A et B sont des parties de X telles que $A^-\cap B = A\cap B^- = \emptyset$ alors

$$(A\cup B)^\circ = A^\circ\cup B^\circ \qquad (A\cup B)^\bullet = A^\bullet\cup B^\bullet.$$

e) Si A et B sont des parties de X et si A ou B est ouvert alors

$$A^{-\circ}\cap B^{-\circ} = (A\cap B)^{-\circ}.$$

f) Si A est une partie non vide de X, alors

$$A^- = \{x\in X : d(x,A)=0\}.$$

On en déduit que tout fermé (resp. tout ouvert) de X est intersection (resp. union) dénombrable d'ouverts (resp. de fermés).

Solution: a) Bien sûr, on a $(A\cap\Omega)^- \subset (A^-\cap\Omega)^-$. Soit alors $a\in A^-\cap\Omega$ et soit V un voisinage de a. Comme $\Omega\cap V$ est encore un voisinage de a, et comme a est adhérent à A, l'intersection $A\cap(\Omega\cap V)$ n'est pas vide. De $A^-\cap\Omega\subset(A\cap\Omega)^-$, on déduit alors la thèse.

b) découle du fait que tout ouvert est voisinage de chacun de ses points et que tout voisinage de x contient un ouvert auquel x appartient.

c) est direct vu les propriétés de l'intérieur et de l'adhérence d'une partie de X.

d) On a toujours $A^\circ\cup B^\circ \subset (A\cup B)^\circ$ et par conséquent aussi $(A\cup B)^\bullet \subset A^\bullet\cup B^\bullet$. Supposons que $A^-\cap B = A\cap B^- = \emptyset(\star)$. Soit $x\in(A\cup B)^\circ$. Si x appartient à A (resp. à B), on déduit de $(\star)$ que l'ensemble $\complement B$ (resp. $\complement A$) est un voisinage de x; par conséquent $(A\cup B)\cap\complement B = A\cap\complement B$ (resp. $(A\cup B)\cap\complement A = B\cap\complement A$) est aussi un voisinage de x. Dès lors A (resp. B) est voisinage de x et $x \in A^\circ \cup B^\circ$. Comme on a $A^- \subset \complement B \subset \complement B^\circ$ et $B^- \subset \complement A \subset \complement A^\circ$, l'égalité

$$A^\bullet \cup B^\bullet = (A^- \backslash A^\circ) \cup (B^- \backslash B^\circ)$$

conduit à

$$\begin{aligned} A^\bullet \cup B^\bullet \subset (A \cup B)^- \backslash (A^\circ \cup B^\circ) &= (A \cup B)^- \backslash (A \cup B)^\circ \\ &= (A \cup B)^\bullet \end{aligned}$$

.

e) Pour toutes parties A et B de X, on a $A \cap B \subset A^- \cap B^-$; par conséquent $(A \cap B)^- \subset A^- \cap B^-$ donc $(A \cap B)^\circ \subset (A^- \cap B^-)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Cela étant, supposons par exemple que A soit ouvert et démontrons que l'ouvert $A^{-\circ} \cap B^{-\circ}$ est inclus dans $(A \cap B)^-$. Comme A est ouvert, on a $(A \cap B)^- = (A \cap B^-)^-$. Soit alors un élément x de $A^{\circ -} \cap B^{\circ -}$ et un voisinage V de x. L'ensemble $A^- \cap B^- \cap V$ étant encore un voisinage de x, on en déduit que $A \cap B^- \cap V$ n'est pas vide. D'où la conclusion.

f) L'adhérence A^- de A s'écrit encore

$$A^- = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{x \in X : d(x,a) < \frac{1}{m}\}.$$

Dès lors, par définition de la fonction $d(\cdot, A)$, on a

$$A^- = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{x \in X : d(x,a) < \frac{1}{m}\}$$

d'où

$$A^- = \{x \in X : d(x,A) = 0\}.$$

□

Exercice 1.4 Soient (X,d) un espace métrique, B un sous-espace de (X,d) et A une partie de B. Alors

a) $A^{-_B} = A^{-_X} \cap B$; $A^{\circ_X} = A^{\circ_B} \cap B^{\circ_X}$; $A^{\bullet_B} \subset A^{\bullet_X} \cap B$;

b) si B est ouvert dans (X,d) alors $A^{\circ_X} = A^{\circ_B}$ et $A^{\bullet_B} = A^{\bullet_X} \cap B$; si B est fermé alors $A^{-_B} = A^{-_X}$.

Solution: Il suffit d'appliquer les définitions de l'adhérence, de l'intérieur et de la frontière d'un ensemble dans un espace métrique.

Exemples :

(i) Dans $X = \mathbb{R}$: l'ensemble $A =]0, 1]$ est fermé dans $B =]0, +\infty[$, ouvert dans $B =]-\infty, 1]$; l'ensemble $A = \{0\}$ coïncide avec sa frontière dans $X = \mathbb{R}$ alors que sa frontière dans $B = \{0\} \cup [1, 2]$ est l'ensemble vide ($\{0\}$ est voisinage de lui-même dans cet espace).

(ii) Dans $X = \mathbb{R}^3$: l'ensemble $A = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert dans $B = \mathbb{R}^2$ et son intérieur dans $\mathbb{R}^3$ est vide. □

Exercice 1.5 Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur Ω telle que $\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x) = 0$ pour tout $x_0 \in \Omega$. Alors l'ensemble des points d'annulation de f est partout dense dans Ω.

Solution: Soit N l'ensemble $\{x \in \Omega : f(x) = 0\}$ et soit ω un ouvert non vide de Ω. Si $\omega \cap N = \emptyset$ alors $\omega = \cup_{m \in \mathbb{N}} \{x \in \omega : |f(x)| \geq \frac{1}{m}\}$. Comme ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, il n'est pas dénombrable; il s'ensuit qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble $\{x \in \omega : |f(x)| \geq \frac{1}{M}\}$ ne soit pas dénombrable. Cela étant, soit K_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite croissante de compacts telle que $\omega = \cup_{m \in \mathbb{N}} K_m$. On obtient donc un $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble $\{x \in K_{M_0} : |f(x)| \geq \frac{1}{M}\}$ soit non dénombrable; soit x_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite d'éléments distincts de cet ensemble. Comme K_{M_0} est compact, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la suite x_m converge vers $x \in K_{M_0}$ et que $x_m \neq x$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Dès lors, vu l'hypothèse sur f, on a $\lim_{m \to +\infty} f(x_m) = 0$, ce qui contredit $|f(x_m)| \geq \frac{1}{M}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. □

Exercice 1.6 Soit (X, d_X) l'espace discret introduit au cours.

a) Pour tout espace métrique (Y, d_Y), toute application

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

est continue.

b) (X, d_X) est complet.

c) (X, d_X) est compact si et seulement si X est fini.

d) (X, d_X) est séparable si et seulement si X est dénombrable.

e) Les seules parties connexes non vides de (X, d_X) sont les singletons.

Solution: Il suffit de se rappeler que tous les sous-ensembles de X sont des ouverts de (X, d_X). □

Exercice 1.7 Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de X. Alors

a) A est borné si et seulement si A^- est borné;

b) si A est borné, alors diam $A =$ diam A^-;

c) si A est précompact, alors A est borné;

d) si (X, d) est complet, si A_m $(m \in \mathbb{N})$ est une suite décroissante de parties bornées, fermées et non vides de (X, d) telle que

$$\operatorname{diam} A_m \to 0,$$

alors $\cap_{m=1}^{+\infty} A_m$ est un singleton.

Solution:

a) est immédiat car d'une part $A \subset A^-$ et d'autre part les boules $b(x, r)$ de (X, d) sont fermées.

b) Comme $A \subset A^-$, on a bien sûr $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} A^-$. Réciproquement, soient x, y deux éléments de A^- et soit $\epsilon > 0$. Il existe $a, b \in A$ tels que $d(x, a) \leq \epsilon/2$ et $d(y, b) \leq \epsilon/2$. Dès lors on obtient $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(y, b) \leq \epsilon + \operatorname{diam} A$. Finalement, on a $\operatorname{diam} A^- \leq \operatorname{diam} A$.

c) Comme A est précompact, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_n \in X$ $(n \leq N)$ tels que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} b(a_n, 1).$$

Soit $x \in X$. Alors pour tout élément a de A, on a

$$d(x, a) \leq d(x, a_n) + d(a_n, a) \leq \sup(d(x, a_j) : j \leq N) + 1$$

si n est choisi tel que $d(a, a_n) \leq 1$. Il s'ensuit que A est inclus dans la boule de centre x et de rayon égal à $\sup(d(x, a_n) : n \leq N) + 1$.

d) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, choisissons un élément a_m de A_m. Cela étant, comme la suite diam A_m converge vers 0 et comme les A_m sont emboîtés en décroissant,la suite a_m est de Cauchy. Dès lors, comme l'espace (X, d) est complet, il existe $a \in X$ tel que la suite a_m converge dans (X, d) vers a. Démontrons que l'intersection des A_m coïncide avec $\{a\}$.

De fait, en se rappelant que les A_m sont fermés et que l'on a $a_n \in A_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq N$, on obtient que la limite a de la suite a_m appartient à chacun des A_N $(N \in \mathbb{N})$. De plus, si x et y sont deux éléments de $\cap_{m \in \mathbb{N}} A_m$, alors on a $d(x, y) \leq$ diam A_m pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc $d(x, y) = 0$ et finalement $x = y$. $\square$

Exercice 1.8 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques.

a) Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continu et si A est une partie relativement compacte de X, alors $f(A^-) = (f(A))^-$.

b) Si $f, g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ sont continus, alors l'ensemble $F := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé.

c) Pour toute fonction continue f sur $\mathbb{R}^n \times [a, b]$, la fonction $S(x) = \sup_{a \le y \le b} |f(x, y)|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Solution:

a) D'une part, comme f est continu, on a $A^- \subset f^{-1}(f(A))^-$ donc $f(A^-) \subset (f(A))^-$. D'autre part, comme A^- est compact et comme f est continu, l'ensemble $f(A^-)$ est compact, donc fermé. D'où la conclusion car on a $f(A) \subset f(A^-)$.

b) est direct en se rappelant qu'un ensemble est fermé si et seulement s'il contient les limites de ses suites convergentes.

c) Montrons que S est continu en tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Posons $B_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le 1\}$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^n \times [a, b]$, elle est uniformément continue sur le compact $B_0 \times [a, b]$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $0 < r \le 1$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} x, x' \in B_0,\ t, t' \in [a, b] \\ |(x, t) - (x', t')| \le r \end{array} \right. \Longrightarrow |f(x, t) - f(x', t')| \le \varepsilon. \tag{1.1}$$

Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|x - x_0| \le r$, vu (1.1), on a

$$|f(x, t)| \le |f(x, t) - f(x_0, t)| + |f(x_0, t)| \le \varepsilon + S(x_0) \quad \forall t \in [a, b]$$

donc

$$S(x) \le \varepsilon + S(x_0)$$

et de même

$$S(x_0) \le \varepsilon + S(x).$$

D'où la conclusion. □

Exercice 1.9

a) Si A est une matrice réelle de dimension $m \times n$, alors l'application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;\; x \mapsto Ax$ est linéaire et continue.

b) Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit E l'espace normé $(C_0([a,b]), \sup_{a\leq x\leq b}|\cdot(x)|)$. Etablir que l'application $S : E \to E$ $f \mapsto \int_a^y f(x)dx$ est définie, linéaire et continue (l'image de la boule unité de E est même relativement compacte dans E).

Solution:

a) est immédiat.

b) Vu le théorème de Lebesgue, S est bien défini. Il est alors immédiat de voir que S est linéaire et continu. □

Exercice 1.10 Si deux fermés (resp. ouverts) de l'espace (X,d) ont une réunion et une intersection connexes, alors ils sont connexes.

Solution: Soient F_1 et F_2 deux fermés tels que $F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2$ soient connexes. Procédons par l'absurde et supposons par exemple que F_1 n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts Ω_1 et Ω_2 de (X,d) tels que $\Omega_1 \cap F_1$ et $\Omega_2 \cap F_1$ forment une partition de F_1. Considérons alors les ensembles

$$\Omega_1 \cap (F_1 \cap F_2) \quad \text{et} \quad \Omega_2 \cap (F_1 \cap F_2).$$

Il s'agit d'ouverts de $F_1 \cap F_2$, dont l'intersection est vide et dont la réunion est $F_1 \cap F_2$. Comme $F_1 \cap F_2$ est connexe, l'un (au moins) d'entre eux est vide. Par exemple $\Omega_1 \cap F_1 \subset \complement F_2$; d'où il vient

$$F_1 \cap F_2 \subset \Omega_2.$$

Considérons ensuite les ensembles

$$(F_1 \cap \Omega_2) \cup (F_2 \backslash F_1) \quad \text{et} \quad F_1 \cap \Omega_1.$$

Il s'agit d'ouverts de $F_1 \cup F_2$ car ils s'écrivent $(F_1 \cup F_2) \cap (\Omega_2 \cup \complement F_1)$ d'une part et $(F_1 \cup F_2) \cap (\Omega_1 \cup \complement F_2)$ d'autre part. De plus, $F_1 \cup F_2$ est égal à leur réunion. Comme $F_1 \cup F_2$ est connexe, l'un (au moins) de ces ensembles est vide. Comme $F_1 \cap \Omega_1$ et $F_1 \cap \Omega_2$ forment une partition de F_1, on doit avoir $F_2 \backslash F_1 = \emptyset$ donc $F_2 \subset F_1$. Mais ceci est absurde car par hypothèse $F_1 \cup F_2$ est connexe alors qu'on vient de supposer F_1 non connexe.

On peut procéder de manière analogue lorsqu'il s'agit d'ouverts.

Il faut cependant remarquer que ce résultat n'est plus valable lorsque les deux ensembles ne sont pas simultanément ouverts ou fermés.

De fait, dans $\mathbb{R}$, les ensembles $A_1 = [1,2] \cup [3,4]$ et $A_2 =]0,1[\cup]2,3[$ sont de réunion et d'intersection connexes ($A_1 \cup A_2 =]0,4]$ et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$) bien que ni A_1 ni A_2 ne soit connexe. □

Exercice 1.11 Soit (X, d_X) un espace métrique.

a) L'espace (X, d_X) est connexe si et seulement si toute partie propre et non vide de X a une frontière non vide.

b) Si A et B sont deux parties connexes non vides de (X, d_X) alors $A \cup B$ est connexe si et seulement si l'un des ensembles $A \cap B^-$ et $A^- \cap B$ est non vide.

Solution:
a) La condition est nécessaire. En effet, soit A une partie propre non vide de X. Si $A^\bullet = \emptyset$ alors $A^- = A^\circ = A$, donc A est à la fois ouvert et fermé dans X, ce qui est absurde.

La condition est suffisante. En effet, si Ω_1, Ω_2 est une disconnexion de X, alors Ω_1 est une partie propre et non vide de X qui est à la fois ouverte et fermée, donc qui a une frontière vide. D'où une contradiction.

b) La condition est nécessaire. Supposons que $A \cup B$ soit connexe et que $A \cap B^- = \emptyset$. Si on a aussi $A^- \cap B = \emptyset$, alors $(\complement\, A^-) \cap (A \cup B)$ et $(\complement\, B^-) \cap (A \cup B)$ forment un recouvrement disjoint ouvert de $A \cup B$. Comme $A \cup B$ est connexe, l'un au moins de ces ensembles est vide, par exemple $\complement\, A^- \cap (A \cup B) = \complement\, A^- \cap B$. Dès lors $B \subset A^-$ donc $\emptyset = A^- \cap B = B$. D'où une contradiction.

La condition est suffisante. Supposons que $A^- \cap B \neq \emptyset$. S'il existe des ouverts Ω_1, Ω_2 de (X, d_X) tels que $\Omega_1 \cap (A \cup B)$ et $\Omega_2 \cap (A \cup B)$ forment une partition binaire ouverte de $A \cup B$, alors $(\Omega_1 \cap A) \cup (\Omega_1 \cap B) \neq \emptyset$ donc $\Omega_1 \cap A \neq \emptyset$ ou $\Omega_1 \cap B \neq \emptyset$. Raisonnons en supposant $\Omega_1 \cap A \neq \emptyset$. Comme A est connexe, on en déduit que $A \cap \Omega_2 = \emptyset$ et par suite $\Omega_2 \cap B \neq \emptyset$. Vu la connexité de B, on obtient $B \cap \Omega_1 = \emptyset$. Par conséquent $A^- \cap B \subset A^- \cap \Omega_2 \subset (A \cap \Omega_2)^- = \emptyset$; d'où une contradiction. □

Exercice 1.12 Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$.

a) Le complémentaire de la boule unité $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ est connexe par arcs.

b) L'espace $\mathcal{E} = \{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin 1/x) : x \in]0, 1/\pi]\}$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Solution: a) Soient a et b deux points distincts de $\mathbb{R}^2 \backslash B$ tels que $|a| \leq |b|$.

(i) Si $|a| = |b| = R$ et si $\arg(a) < \arg(b)$ (par exemple), alors l'application

$$f' = [\arg(a), \arg(b)] \to \mathbb{R}^2 \backslash B \qquad t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$$

est continue (car les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$) et telle que $f'(\arg(a)) = a$ et $f'(\arg(b)) = b$. Si l'on veut revenir à l'intervalle $[0,1]$, il suffit de considérer la fonction continue

$$g : [0,1] \to [\arg(a), \arg(b)] \quad t \mapsto \arg(a) + t(\arg(b) - \arg(a))$$

et l'application $f' \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash B$.

(ii) Si $|a| < |b|$ et $\arg(a) = \arg(b)$, alors l'application

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash B \quad t \mapsto a + t(b - a)$$

est continue et telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

(iii) Si $|a| < |b|$ et $\arg(a) < \arg(b)$, alors d'une part

$$f_1 : [\arg(a), \arg(b)] \to \mathbb{R}^2 \backslash B \quad t \mapsto (|a| \cos t, |a| \sin t)$$

est continu et tel que $f_1(\arg(a)) = a$, $c := f_1(\arg(b))$. D'autre part,

$$f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash B \quad t \mapsto c + t(b - c)$$

est continu et tel que $f_2(0) = c$ et $f_2(1) = b$. Il s'ensuit que $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash B$ défini par $f(t) = f_1(g(2t))$ si $t \in [0, 1/2]$; $f(t) = f_2(2t - 1)$ si $t \in [1/2, 1]$ est continu et tel que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

(iv) Si $|a| < |b|$ et $\arg(a) > \arg(b)$, on procède comme dans le cas précédent en considérant par exemple d'abord

$$g_1 : [\arg(b), \arg(a)] \to \mathbb{R}^2 \backslash B \quad t \mapsto (|b| \cos\ t, |b| \sin\ t)$$

puis

$$g_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash B \quad t \mapsto d + t(a - d)$$

(où on pose $d := (|b| \cos\ \arg(a), |b| \sin\ \arg(a))$.

b) Posons $\mathcal{S} := \{0\} \times [-1, 1]$ et $\mathcal{G} = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in]0, 1/\pi]\}$. Comme $\mathcal{S} \cap \mathcal{G}^- \neq \emptyset$ (car la suite $(1/k\pi, 0)$ $(k \in \mathbb{N})$ appartient à $\mathcal{G}$ et converge dans $\mathbb{R}^2$ vers (0,0)) et comme $\mathcal{S}$ et $\mathcal{G}$ sont des parties connexes de $\mathbb{R}^2$, leur réunion $\mathcal{E}$ est connexe.

Cela étant, démontrons par l'absurde que $\mathcal{E}$ n'est pas connexe par arcs. De fait, supposons qu'il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathcal{E}$ telle que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1/\pi, 0)$. Soit $r_0 = \sup\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in \mathcal{S}\}$. Comme $\gamma(1)$ appartient à $\mathcal{G}$ et comme γ est continu, on obtient $0 \leq r_0 < 1$; de plus, la continuité de γ permet aussi de démontrer que $\gamma(r_0)$ appartient à $\mathcal{S}$. Supposons par exemple que $\gamma(r_0) \in \{0\} \times [0,1]$. Il existe alors un voisinage V de $\gamma(r_0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et par suite $\epsilon > 0$ tels que $\gamma([r_0, r_0 + \epsilon]) \subset V \backslash (\mathbb{R} \times [-1, -\frac{1}{2}])$. On construit alors directement une partition binaire ouverte U_1, U_2 de $\gamma([r_0, r_0 + \epsilon])$. D'où une contradiction car $\gamma([r_0, r_0 + \epsilon])$ est connexe.

□

Exercice 1.13

a) Toute partie connexe de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs.

b) Tout ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

c) Toute partie de $\mathbb{Q}$ (sous-espace de $\mathbb{R}$) contenant plus d'un point n'est pas connexe.

Solution: a) et c) sont directs.

b) Si Ω est vide, il est bien sûr connexe par arcs. S'il ne l'est pas, pour tout élément x de Ω considérons l'ensemble

$$\Omega_x := \{y \in \Omega : \exists \text{ un chemin } \gamma : [0,1] \to \Omega \text{ tel que } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y\}.$$

La famille Ω_x $(x \in \Omega)$ est une famille d'ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ (pour prouver que Ω_x est ouvert, on peut procéder comme suit : pour tout $y \in \Omega_x$, il existe $r > 0$ tel que la boule b de centre y et de rayon r soit incluse dans l'ouvert Ω. Pour conclure, il suffit alors de noter que la boule b est en fait incluse dans Ω_x) telle que pour tous $x, x' \in \Omega$, on ait

$$\Omega_x \cap \Omega_{x'} = \emptyset \quad \text{ou} \quad \Omega_x \cap \Omega_{x'} = \Omega_x = \Omega_{x'}.$$

Pour conclure, il suffit de prouver que tous les Ω_x coïncident.

De fait, si ce n'est pas le cas, il existe des éléments x et x' de Ω tels que $\Omega_x \neq \Omega_{x'}$ donc tels que $\Omega_x \cap \Omega_{x'} = \emptyset$. Les ensembles

$$\Omega_x \ \text{ et } \bigcup_{y \in \Omega, \Omega_y \neq \Omega_x} \Omega_y$$

forment par conséquent une partition binaire ouverte de Ω, ce qui est contradictoire.
□

Exercice 1.14

a) Soit (X, d_X) un espace métrique ($X \neq \emptyset$). Une partie C de X est une composante connexe de (X, d_X) si et seulement si c'est un connexe maximal (c'est-à-dire un connexe tel que, si A est une partie connexe de (X, d_X) contenant C, alors $A = C$).

b) Toute composante connexe d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est ouverte.

c) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit f une application continue de (X, d_X) dans (Y, d_Y). Pour toute composante connexe C de (Y, d_Y), l'ensemble $f^{-1}(C)$ est réunion de composantes connexes de (X, d_X).

Solution: a) La condition est nécessaire. Par définition des composantes connexes, C est la classe d'équivalence de l'un de ses éléments; soit $C = C_c$. Dès lors pour toute partie connexe A de (X, d) contenant C, A contient c, donc est inclus dans C. De plus, C est connexe comme réunion de connexes d'intersection deux à deux non vide.

La condition est suffisante. D'une part, si X n'est pas vide, il en est de même pour C. Soit donc un élément c de C. Démontrons que C est la réunion des connexes de (X, d) contenant c. De fait, si B est connexe et contient c, l'ensemble $B \cup C$ est connexe et contient C; dès lors $B \subset B \cup C = C$. Pour conclure, il suffit alors de constater que C est lui-même un connexe contenant c.

b) Soit C une composante connexe de Ω et soit $x \in C$. Il existe $b(x, r)$ inclus dans Ω. Comme $b(x, r)$ est connexe (car convexe) et d'intersection non vide avec C, la boule $b(x, r)$ est incluse dans C, d'où la conclusion.

c) Pour toute composante connexe A de (X, d_X) telle que $A \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$, on a $A \subset f^{-1}(C)$ (de fait : $f(A)$ est connexe et $f(A) \cap C \neq \emptyset$; dès lors $f(A) \cup C$ est un connexe contenant C, donc égal à C). Comme X est égal à la réunion de ses composantes connexes, $f^{-1}(C)$ est l'union des traces (non vides) sur $f^{-1}(C)$ des composantes connexes de (X, d_X); par conséquent $f^{-1}(C)$ est l'union de ces composantes connexes. □

Exercice 1.15 Soit (X, d) un espace métrique. Etablir qu'une partie compacte K de (X, d) est connexe si et seulement si pour tous $x, y \in K$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre fini d'éléments

$$x_0 := x, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} := y$$

de K tels que $d(x_j, x_{j+1}) < \epsilon$ pour tout $j \in \{0, \ldots, N\}$.

Solution: La condition est nécessaire (on n'utilise pas l'hypothèse de compacité de K); il suffit de remarquer que, pour tout $x \in K$ et tout $\epsilon > 0$, l'ensemble

$$\{y \in K : \exists x_0 = x, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} = y \in K : d(x_j, x_{j+1}) < \epsilon \quad \forall j = 0, \ldots, N\}$$

est une partie ouverte, fermée, non vide de K et par conséquent est égale au connexe K.

La condition est suffisante. De fait, si le compact K n'est pas connexe, il existe une partition fermée F_1, F_2 de K. Comme F_1 et F_2 sont compacts et d'intersection vide, il existe $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$ tels que $\epsilon := d(F_1, F_2) = d(f_1, f_2)$ soit strictement positif. Il existe ensuite des éléments $x_0 := f_1, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} := f_2$ de K tels que $d(x_j, x_{j+1}) < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $j = 0, \ldots, N$. Il s'ensuit qu'il existe $j \in \{0, \ldots, N\}$ tel que $x_j \in F_1$ et $x_{j+1} \in F_2$, ce qui est absurde car $d(F_1, F_2) = \epsilon$. □

Exercice 1.16 Pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\text{Pr}(\mathcal{K}) := \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}\ (x, y) \in \mathcal{K}\}$ est un compact de $\mathbb{R}$. Ce résultat est-il encore valable si on remplace "compact" par "fermé" (resp. par "ouvert") ?

Solution: Pour démontrer que $\text{Pr}(\mathcal{K})$ est compact, on peut soit démontrer qu'il est extractable, soit démontrer que l'application $\text{Pr} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1 (x, y) \mapsto x$ est continue.

Cas fermé non valable : le fermé $\mathcal{F} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est tel que $\text{Pr}(\mathcal{F}) =]0, +\infty[$.

Cas ouvert valable : soit θ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit x un élément de $\text{Pr}(\theta)$. Il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in \theta$ et par suite $r > 0$ tel que $b(x, r) \times b(y, r) \subset \theta$. Dès lors $b(x, r) \subset Pr(\theta)$. □

Exercice 1.17 Soit d une distance sur X. La loi $\delta := d/(1 + d)$ est alors une distance sur X telle que

a) l'application identité est continue de (X, d) dans (X, δ) et de (X, δ) dans (X, d) (on dit que les espaces (X, d) et (X, δ) sont homéomorphes);

b) X est borné pour δ (alors qu'il ne l'est pas nécessairement pour d comme le montre l'exemple de $X = \mathbb{R}$ et $d = |\cdot|$);

c) d et δ définissent les mêmes suites de Cauchy.

Solution: La loi δ est bien définie sur $X \times X$ et est à valeurs dans $[0, +\infty[$. Bien sûr, on a aussi $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ et $\delta(x, y) = 0$ si et seulement si $d(x, y) = 0$, donc si et seulement si $x = y$. Pour prouver que δ est une distance, il reste donc à prouver que cette application vérifie l'inégalité triangulaire. De fait, la fonction $f(x) := x/(1+x)$ est une fonction croissante sur $]-1,+\infty[$. Dès lors, pour tous $x,y,z \in X$, on a $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ donc aussi

$$\begin{aligned}\delta(x,y) &= f(d(x,y)) \leq f(d(x,z)+d(z,y)) \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \\ &= \delta(x,z)+\delta(z,y).\end{aligned}$$

a) D'une part, pour tous $x, x_0 \in X$ et tout $0 < \epsilon < 1$, on a $\delta(x,x_0) < \epsilon \Leftrightarrow d(x,x_0) < \epsilon/(1-\epsilon)$ donc $id : (X,d) \to (X,\delta)$ est continu. D'autre part, pour tous $x,x_0 \in X$ et tout $\epsilon > 0$, on a $d(x,x_0) < \epsilon \Leftrightarrow \delta(x,x_0) < \epsilon/(1+\epsilon)$, donc $id : (X,\delta) \to (X,d)$ est continu.

b) est évident car δ est à valeurs dans $[0,1]$.

c) se démontre comme a). □

Exercice 1.18 La loi $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$

a) est une distance sur $\mathbb{R}$ équivalente au module (c'est-à-dire que l'identité est continue de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}, d)$ et de $(\mathbb{R}, d)$ dans $\mathbb{R}, |\cdot|)$;

b) est telle que toute suite de Cauchy pour $|\cdot|$ est de Cauchy pour d mais la réciproque n'est pas vraie;

c) est telle que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet, mais il existe un espace métrique complet F tel que $(\mathbb{R}, d)$ soit un sous-espace dense de F.

Solution: a) Le fait que d soit une distance est évident (se rappeler que arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$). De plus, comme les fonctions tan et arctan sont continues et inverses l'une de l'autre, on vérifie immédiatement que $|\cdot|$ et d sont des distances équivalentes.

b) Comme D_x arctan $x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $d(x,y) \leq |x-y|$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}$; dès lors, toute suite de Cauchy pour $|\cdot|$ est de Cauchy pour d. De plus, la suite $x_m := m$ $(m \in \mathbb{N})$ est de Cauchy pour d mais non pour $|\cdot|$.

c) Comme $x_m := m$ $(m \in \mathbb{N})$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$, l'espace $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet. L'espace F obtenu en munissant $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de la distance $d^\star$ définie par

$$\begin{array}{lcll} d^\star(x,y) & = & d(x,y) & \text{si } x,y \in \mathbb{R} \\ d^\star(-\infty,y) & = & |(\pi/2)+\arctan y| & \text{si } y \in \mathbb{R} \\ d^\star(x,+\infty) & = & |(\pi/2)-\arctan x| & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ d^\star(-\infty,+\infty) & = & \pi & \end{array}$$

est un espace métrique complet dont $(\mathbb{R}, d)$ est un sous-espace dense. □

Exercice 1.19

a) Vérifier que les lois suivantes sont des normes sur les espaces linéaires correspondants :

$\sup_{x\in K} \lvert\cdot(x)\rvert$	sur	$\mathrm{C}^0(K)$	(K compact de $\mathbb{R}^n$
$\int_a^b \lvert\cdot(x)\rvert\, dx$	sur	$\mathrm{C}^0([a,b])$	$(a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b)$
$\sup_{x\in\Omega} \lvert\cdot(x)\rvert$	sur	$\mathrm{C}_0^0(\Omega)$	(Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$)
$\sup_{m\in\mathbb{N}} \lvert\cdot_m\rvert$	sur	l_∞ et C^0	
$\sum_{m=1}^{+\infty} \lvert\cdot_m\rvert$	sur	l_1	
$\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \lvert\cdot_m\rvert^2\right)^{1/2}$	sur	l_2	

b) Soit M l'ensemble

$$\{f \in C_0([0,1]) : f(0) = 0, f(1) = 1, \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \leq 1\}$$

muni de la distance $d(f,g) := \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) - g(x)|$. Vérifier que l'opérateur $T : M \to [0,1]$ défini par

$$f \mapsto \int_0^1 |f(x)|^2\, dx$$

est continu; en déduire que M n'est pas compact (mais il est borné et fermé dans $C([0,1])$).

Solution: a) est direct.

b) On vérifie directement que T est bien défini. De plus, il est continu car on a, pour tous $f, g \in M$:

$$|Tf - Tg| = \left|\int_0^1 (|f|^2 - |g|^2)dx\right| \leq 2\int_0^1 \big|\ |f| - |g|\ \big|\, dx \leq 2\ d(f,g).$$

Considérons la suite $f_m(x) = x^m$ $(m \in \mathbb{N})$ de M. Si M est compact, il existe $f \in M$ et une sous-suite $f_{k(m)}$ de f tels que $f_{k(m)} \to f$ dans M. Comme T est continu, la suite $Tf_{k(m)} = 1/(2k(m)+1)$ converge vers Tf. Dès lors, $Tf = \int_0^1 |f|^2\, dx = 0$ et par suite $f = 0$ sur $[0,1]$. D'où une contradiction car f appartient à M. □

Exercice 1.20 [*Ensembles convexes et cônes conormaux*]

Soit c un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. On définit le conormal à c en $x \in c$ comme l'ensemble des vecteurs $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$y \in c \Rightarrow \langle y - x, \xi \rangle \leq 0,$$

on le note $N_x^\star(c)$ et on définit le fibré normal à c en posant

$$N^\star(c) = \bigcup_{x \in c} \{x\} \times N_x^\star(c) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

On vérifie aisément que $N^\star(c)$ est fermé. On demande de montrer que

a) $N_x^\star(c)$ est un cône convexe fermé.

b) $N_x^\star(c) = \{0\} \Leftrightarrow x \in c^\circ$.

c) Pour tout x, la distance $d(x, c)$ est réalisée en un et un seul point $p(x)$ de c.

d) On a l'égalité

$$p^{-1}(x) = x + N_x^\star(c)$$

et en particulier, on a

$$x - p(x) \in N_{p(x)}^\star(c).$$

e) L'application p est continue et $p(x) \in c^\bullet$ si $x \notin c$.

f) On a l'égalité

$$c = \bigcap_{(x,\xi) \in N^\star(c)} \{y : \langle y - x, \xi \rangle \leq 0\}.$$

g) La fonction

$$d^2(x, c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

est de classe C^1 et on a

$$\mathrm{grad}_x d^2(x, c) = 2(x - p(x)).$$

h) Si $\psi : U \to V$ est une application C^1 d'un voisinage U de c sur un voisinage V de $\psi(c)$ et si $\psi(c)$ est convexe, alors

$$\widetilde{\frac{\partial \psi}{\partial x}}(N_{\psi(x)}^\star \psi(c)) = N_x^\star c.$$

i) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$

$$c_\epsilon = \{x : d(x, c) \leq \epsilon\}$$

est une variété à bord de classe C^1 et que

$$N_x^\star(c_\epsilon) \subset N_{p(x)}^\star(c).$$

Solution:

a) C'est trivial. En effet, il est clair que $N^\star(c)$ est fermé et que $N_x^\star(c)$ est convexe et conique.

b) Si $x \in c^0$, il existe une boule B centrée en x et incluse dans c ainsi $N_x(c) = \{0\}$. Si $x \in c$, il existe une suite $x_m \notin c$ telle que $x_m \to x$. Dès lors,

$$\xi_m = \frac{x_m - p(x_m)}{|x_m - p(x_m)|}$$

est une suite bornée et $(x_m, \xi_m) \in N^\star(c)$. On peut donc trouver une sous-suite $(x_m, \xi_m) \in N^\star(c)$ qui converge vers (x, ξ), $|\xi| = 1$. Il en résulte que $\xi \in N_x^\star(c)$ et que $N_x^\star(c) \neq \{0\}$.

c) Comme $\mathbb{R}^n$ est localement compact, la distance $d(x, c)$ est réalisée en un point $y_1 \in c$. Elle est réalisée en $y_2 \in c$ et si $y_2 \neq y_1$, il est clair que

$$d(x, \frac{y_1 + y_2}{2}) < \frac{d(x, y_1) + d(x, y_2)}{2} = d(x, c)$$

et comme c est convexe, $\frac{y_1+y_2}{2} \in c$ et on doit également avoir

$$d(x, c) \leq d(x, \frac{y_1 + y_2}{2}),$$

d'où une contradiction.

d) Soit h un vecteur tel que $p(x) + h \in c$. Par convexité, $p(x) + th \in c$ pour $t \in [0, 1]$. Ainsi, on a successivement

$$\begin{array}{ll}
|p(x) + th - x|^2 & \geq |p(x) - x|^2 \\
|p(x) - x|^2 + 2t\,\langle p(x) - x, h\rangle + t^2\,|h|^2 & \geq |p(x) - x|^2 \\
2\,\langle p(x) - x, h\rangle + t\,|h| & \geq 0
\end{array}$$

pour tout $t \in [0, 1]$. En laissant t tendre vers 0, on voit que

$$\langle x - p(x), h\rangle \leq 0.$$

De cette majoration, il résulte que

$$x - p(x) \in N_{p(x)}^\star(c).$$

Comme $x = (x - p(x)) + p(x)$, on a $p^{-1}(y) \subset y + N_y^\star(c)$.

Soit maintenant un $\xi \in N_y^\star(c) \backslash \{0\}$. Par définition,

$$c \subset \{x : \langle x - y, \xi \rangle \leq 0\}.$$

Il en résulte que $d(y+\xi, c) \geq d(y+\xi, y) \geq d(y+\xi, c)$. Ainsi $d(z+\xi, c) = d(y+\xi, y)$ et $p(y+\xi) = y$ d'où l'on tire que

$$y + N_y^\star(c) \subset p^{-1}(y).$$

e) On a les majorations suivantes

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= |x - p(x) + p(x) - p(y) + p(y) - y|^2 \\
&= |x - p(x) + p(y) - y|^2 + |p(x) - p(y)|^2 \\
&\quad +2\langle x - p(x) + p(y) - y, p(x) - p(y)\rangle \\
&\geq |p(x) - p(y)|^2 - 2\langle x - p(x), p(y) - p(x)\rangle \\
&\quad -2\langle y - p(y), p(x) - p(y)\rangle \\
&\geq |p(x) - p(y)|^2
\end{aligned}$$

d'où la continuité de p. Si $x \in c$, $x - p(x) \neq 0$ et $N^\star_{p(x)}(c) \neq \{0\}$ d'où l'on tire que $p(x) \in c^\bullet$.

f) Il suffit de montrer que si $y \notin c$, il existe $(x, \xi) \in N^\star(c)$ tel que $\langle y - x, \xi \rangle > 0$. Or le couple $(p(y), y - p(y))$ vérifie trivialement cette propriété.

g) On a successivement

$$\begin{aligned}
&d^2(y,c) - d^2(x,c) - 2\langle x - p(x), y - x\rangle \\
&\quad \geq |y - p(y)|^2 - |x - p(y)|^2 - 2\langle x - p(x), y - x\rangle \\
&\quad \geq |y - x|^2 + 2\langle y - x, x - p(y)\rangle - 2\langle x - p(x), y - x\rangle \\
&\quad \geq 2\langle y - x, p(x) - p(y)\rangle \\
&\quad \geq -2|y - x|\ |p(x) - p(y)|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&d^2(y,c) - d^2(x,c) - 2\langle x - p(x), y - x\rangle \\
&\quad \leq |y - p(x)|^2 - |x - p(x)|^2 - 2\langle x - p(x), y - x\rangle \\
&\quad \leq |y - x|^2 + 2\langle y - x, x - p(x)\rangle - 2\langle x - p(x), y - x\rangle \\
&\quad \leq |y - x|^2 .
\end{aligned}$$

D'où l'on tire que

$$\lim_{y \to \infty} \frac{d^2(y,c) - d^2(x,c) - 2\langle x - p(x), y - x\rangle}{|y - x|} = 0$$

et la conclusion en résulte.

h) Soit $\xi \in N^\star_{\varphi(x)}\psi(c)$. Par définition, il est clair que

$$\psi(c) \subset \{y : \langle y - \psi(x), \xi\rangle \leq 0\}.$$

On en tire que

$$c \subset \{y : \langle \psi(y) - \psi(x), \xi\rangle \leq 0\}.$$

Comme c est convexe, si $y \in c$, $x + t(y-x) \in c$ pour $t \in [0,1]$. On en tire que si $y \in c$,

$$\left\langle \frac{\psi(x+t(y-x)) - \psi(x)}{t}, \xi \right\rangle \leq 0$$

pour tout $t \in]0,1]$.

Un passage à la limite pour $t \to 0^+$ montre que

$$\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial x}(y-x), \xi \right\rangle \leq 0.$$

Ainsi, pour tout $y \in c$, on a

$$\left\langle y - x, \widetilde{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\xi \right\rangle \leq 0$$

et $\widetilde{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\,\xi \in N^\star_x(c)$. La conclusion en découle aussitôt.

i) C'est une conséquence directe de g) et h) et du théorème du rang constant. □

Chapitre 2

Espaces C^p

Exercice 2.1 Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites

$$\begin{aligned} f_m^{(1)} &= (1/m)\chi_{[1/m,2/m]} \\ f_m^{(2)} &= \chi_{[1/m,2/m]} \\ f_m^{(3)} &= m\chi_{[1/m,2/m]} \\ f_m^{(4)} &= (1+mx^2)^{-1} \\ f_m^{(5)} &= m^2x\chi_{]0,1/m]} + (2m-m^2x)\chi_{]1/m,2/m]} \\ f_m^{(6)} &= m^2x\, e^{-m(x-1/m)}\chi_{[0,+\infty[} \end{aligned}$$

Solution: Les suites $f_m^{(j)}$ ($j = 1,2,3,5,6$) convergent ponctuellement vers 0. La suite $f_m^{(4)}$ converge ponctuellement vers $\chi_{\{0\}}$. La suite $f_m^{(1)}$ converge aussi uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$. □

Exercice 2.2

a) Etudier la convergence ponctuelle sur $[0,1]$, uniforme sur $[0,1]$, uniforme sur un compact de $]0,1]$ des suites de fonctions f_m et g_m suivantes :

$$\begin{aligned} f_m(x) &= mx(1-x^2)^m \\ g_m(x) &= mx\chi_{[0,1/m]} + (m/(m-1))(1-x)\chi_{]1/m,1]}. \end{aligned}$$

b) Etudier la convergence ponctuelle et uniforme sur $[0,+\infty[$ de la suite de fonctions $f_m(x) = xe^{-mx}$ $(m \in \mathbb{N})$.

c) Etudier la convergence ponctuelle et uniforme sur $[0,+\infty[$, et sur les compacts de $]0,+\infty[$ de la suite de fonctions

$$\frac{m^2x}{1+m^3x^3} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Solution:

a) La suite f_m converge ponctuellement vers 0 sur $[0,1]$ et uniformément vers 0 sur tout compact de $]0,1]$; de plus on a $\sup_{0\le x\le 1}|f_m(x)| = f_m((2m+1)^{-1/2}) \to +\infty$ si $m \to +\infty$.

La suite g_m converge ponctuellement sur $[0,1]$ et uniformément sur tout compact de $]0,1]$ vers la fonction $g(x) = (1-x)\ \chi_{]0,1]}$; de plus on a $\left|g_m(1/m^2) - g(1/m^2)\right| \to 1$ si $m \to +\infty$ donc g_m ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. (On peut aussi constater directement que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$ car les g_m sont continus sur cet intervalle alors que g ne l'est pas.)

b) La suite f_m converge ponctuellement vers 0 sur $[0,+\infty[$. Etudions sa convergence uniforme. Comme $f_m \in C_\infty(\mathbb{R})$ pour tout m, on a $D_xf_m = e^{-mx}(1-mx)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\sup_{0\le x}|f_m(x)| = f_m(1/m) = (1/m)e^{-1}$ donc que $f_m \underset{[0,+\infty[}{\rightrightarrows} 0$.

c) La suite $f_m(x) = m^2x/(1+m^3x^3)$ converge ponctuellement vers 0 sur $[0,+\infty[$ et uniformément vers 0 sur tout compact de $]0,+\infty[$. De plus, on a $\sup_{0\le x}|f_m(x)| = f_m(2^{-1/3}m^{-1}) \to +\infty$ si $m \to +\infty$. □

Exercice 2.3 Etudier la convergence ponctuelle des suites f_m $(m \in \mathbb{N})$ suivantes. Sur quels sous-intervalles de l'ensemble de définition la convergence est-elle uniforme?

a) $f_m(x) = x/m$ $(x \in \mathbb{R})$
b) $f_m(x) = e^{-mx}$ $(x \in [0,+\infty[$
c) $f_m(x) = x^{-1/m}$ $(x \in]0,+\infty[)$
d) $f_m(x) = (x-1)^{1/m}$ $(x \in [1,+\infty[)$
e) $f_m(x) = \dfrac{x}{1+m^2x^2}$ $(x \in [0,+\infty[)$
f) $f_m(x) = \dfrac{mx}{1+m^2x^2}$ $(x \in [0,+\infty[)$
g) $f_m(x) = \dfrac{m^2x}{1+m^2x^2}$ $(x \in [0,+\infty[)$

h) $f_m(x) = xe^{-mx}$ $(x \in [0, +\infty[)$
i) $f_m(x) = mxe^{-mx}$ $(x \in [0, +\infty[)$
j) $f_m(x) = m^2xe^{-mx}$ $(x \in [0, +\infty[)$
k) $f_m(x) = \cosh\left(\dfrac{mx}{m(x^2-1)}\right)$ $(x \neq \pm 1)$
l) $f_m(x) = \cosh\left(\dfrac{x}{m^2x^2-1}\right)$ $(x \neq \pm 1/m)$
m) $f_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} x^k$
n) $f_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k}$
o) $f_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k^2}$
p) $f_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k e^{ikx}$ (où $a_k \downarrow 0$)
q) $f_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{x}{(1+x)^k}$ $(x \in [0, +\infty[)$
r) $f_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{x+m+1}\right)$ $(x \in [0, +\infty[)$

Exercice 2.4 On considère la fonction

$$S :]0, \pi[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m} \tan(x2^{-m}).$$

Calculer cette fonction (i.e. sommer la série). La convergence de la série est-elle uniforme sur $]0, \pi[$?

Solution: Pour tout $x \in]0, \pi/2[$, on a

$$\tan(x) = \cot(x) - 2\cot(2x).$$

Il s'ensuit que, pour tout $M \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M} 2^{-m} \tan(x2^{-m}) &= \sum_{m=1}^{M} 2^{-m} \cot(x2^{-m}) - \sum_{m=1}^{M} 2^{-m+1} \cot(x2^{-m+1}) \\ &= 2^{-M} \cot(x2^{-M}) - \cot(x)\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos(x2^{-M})}{x} \frac{x2^{-M}}{\sin(x2^{-M})} - \cot(x)$$

doù

$$\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m} \tan(x2^{-m}) = \frac{1}{x} - \cot(x).$$

De plus, la convergence de la série est uniforme sur $]0,\pi[$. De fait, comme $2^{-m}x \in]0,\pi/4[$ pour tout $x \in]0,\pi[$ et tout $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, on a

$$\sup_{x\in]0,\pi[} \left| \sum_{m=p}^{q} 2^{-m} \tan(2^{-m}x) \right| \leq \sum_{m=p}^{q} 2^{-m} \to 0 \text{ si } p,q \to +\infty.$$

$\square$

Exercice 2.5

a) Soit la série $S(x) := \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-mx}/(1+m^2)$. Démontrer que cette série converge si $x \geq 0$, diverge si $x < 0$ et que $S(x)$ est un élément de $C_0([0,+\infty[)$.

b) Développer la fonction $f(x) = (1+x)^{-1}$ en série de puissances de x dans $]-1,1[$. Le développement est-il valable en d'autres points ? Etudier la convergence uniforme de la série obtenue sur $]-1,1[$ et sur un compact de $]-1,1[$.

c) Etablir les égalités suivantes pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}/(1+e^{-bt})dt = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m/(a+mb)$$

(en particulier $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots = ln2$ et $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdots = \frac{\pi}{4}$);

$$\int_0^{+\infty} t\, e^{-at}/(1-e^{-bt})dt = \sum_{m=0}^{+\infty} 1/(a+mb)^2;$$

$$\int_0^{+\infty} t\, e^{-at}/(1+e^{-bt})dt = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m/(a+mb)^2.$$

Solution: a) est direct en se rappelant qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

b) Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m x^m$ (série géométrique). De plus, si $x \notin]-1,1[$, la série ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. Cela étant, pour tout $M \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{m=0}^{M}(-1)^m x^m \right| = \frac{|x|^{M+1}}{(1+x)};$$

par conséquent, on obtient

$$\sup_{x\in]-1,1[} \left| f(x) - \sum_{m=0}^{M}(-1)^m x^m \right| \geq (1 - \frac{1}{M+1})^{M+1}.(M+1) \geq (M+1)(2e)^{-1}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Dès lors, la série ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$. Cependant, si K est un compact inclus dans $]-1,1[$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $K \subset [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$. Il s'ensuit que

$$\sup_{x\in K} \left| f(x) - \sum_{m=0}^{M}(-1)^m x^m \right| = \sup_{x\in K} \left(|x|^{M+1}/(1+x) \right) \leq \epsilon^{-1}(1-\epsilon)^{M+1}$$

donc aussi que la série converge uniformément sur tout compact de $]-1,1[$.

c) Ces égalités s'établissent en remarquant que, pour tous $t, b > 0$, on a

$$(1 \pm e^{-bt})^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{c} (-1)^m \\ 1 \end{array} \right\} e^{-mbt}$$

et en passant à la limite sous le signe d'intégration. □

Exercice 2.6

a) Soit f_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné $]a,b[$ de $\mathbb{R}$. Si la suite f_m converge uniformément vers f sur $]a,b[$, alors f est intégrable sur $]a,b[$ et la suite $\int_a^b f_m(x)dx$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$

b) En utilisant a) et la définition de la fonction exponentielle, établir que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m^{-m} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

c) Soient f_m et g_m ($m \in \mathbb{N}$) deux suites de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}^n$. Si la série $\sum_{m=1}^{+\infty} g_m$ converge uniformément sur A et s'il existe $C > 0$ tel que $|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leq C g_m(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $m \in \mathbb{N}$, alors $f_m \underset{A}{\rightrightarrows}$.

d) Soit f_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite de $C_0(\mathbb{R})$ telle que $f_m \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g_m(x) = f_m(x + 1/m)$. Alors la suite g_m converge ponctuellement vers f sur $\mathbb{R}$; si en outre les f_m sont uniformément continus, alors $g_m \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

Solution: a) Comme $a, b \in \mathbb{R}$ et comme les f_m sont intégrables, on déduit directement que f est intégrable sur $]a, b[$. De plus, on a

$$\left| \int_a^b (f_m(x) - f(x))dx \right| \leq (b - a) \sup_{a \leq x \leq b} |f_m(x) - f(x)| .$$

D'où la conclusion.

b) est alors direct.

c) et d) sont des exercices standards. □

Remarque: Dans le point (a) de l'exercice précédent, on ne peut remplacer la convergence uniforme par la convergence ponctuellecomme le montre l'exemple de la suite $f_m(x) = m/(mx + 1)$ et de la fonction $f(x) = 1/x$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 2.7

a) Une fonction uniformément continue f sur $]0, 1]$ est bornée sur $]0, 1]$.

b) Une fonction continue sur $[0, +\infty[$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

c) Si f_m ($m \in \mathbb{N}$) est une suite de fonctions uniformément continues sur $D \subset \mathbb{R}^n$ qui converge uniformément sur D vers f, alors f est uniformément continu sur D.

Solution: a) Comme f est uniformément continu sur $]0, 1]$, il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que $(x, y \in]0, 1], |x - y| < \eta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$. Il s'ensuit que $\sup_{0 < x \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{\eta \leq x \leq 1} |f(x)| + 1 + |f(\eta)|$.

b) Soit $\epsilon > 0$. Comme il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, il existe aussi $\eta > 0$ tel que $\sup_{x\geq\eta} |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{3}$. Cela étant, vu la continuité uniforme de f sur $[0, \eta]$, il existe $r > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in [0, \eta] \\ |x - y| \leq r \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/3.$$

On vérifie alors directement que l'on a aussi

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in [0, +\infty[\\ |x - y| \leq r \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

D'où la conclusion.

c) est direct. □

Remarque: Le point (b) de l'exercice précédent n'admet pas de réciproque comme le montre l'exemple d'une fonction périodique et continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2.8 [*A comparer avec le théorème de Dini du cours*]

a) Soit f_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions réelles et continues sur le compact K de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction définie sur K. Si $f_m(x)$ croît vers $f(x)$ pour tout $x \in K$, alors pour toute fonction continue g sur K telle que $g < f$ sur K, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $g \leq f_m$ sur K pour tout $m \geq M$. Dès lors, si f_m et g_m ($m \in \mathbb{N}$) sont deux suites de fonctions réelles et continues sur K telles que pour tout $x \in K$ les suites $f_m(x)$ et $g_m(x)$ croissent strictement vers $f(x)$, alors il existe une suite strictement croissante $k(m)$ ($m \in \mathbb{N}$) de naturels telle que $f_{m(1)} \leq g_{m(2)} \leq f_{m(3)} \leq g_{m(4)} \leq \ldots$ sur K.

b) Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit f_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions réelles et croissantes définies sur $[a, b]$. S'il existe une fonction continue f sur $[a, b]$ telle que la suite f_m converge ponctuellement vers f sur K, alors la suite f_m converge uniformément vers f sur K.

Solution: a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons $K_m = \{x \in K : g(x) - f_m(x) \geq 0\}$. La suite K_m ($m \in \mathbb{N}$) est alors une suite décroissante de compacts de $\mathbb{R}^n$. Si K_m est non vide pour tout m, il existe x appartenant à $\cap_{m\in\mathbb{N}} K_m$. Dès lors, on a $g(x) \geq f_m(x)$ pour tout m, donc $g(x) \geq f(x)$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $g \leq f_m$ sur K pour tout $m \geq M$.

Posons $k(1) = 1$. Comme $f_1 < f$ sur K, vu a) appliqué à la suite g_m, il existe $k(2) > 1$ tel que $f_1 \leq g_{k(2)}$ sur K. Comme $g_{k(2)} < f$ sur K, une application de a) à la suite f_m fournit $k(3) > k(2)$ tel que $g_{k(2)} \leq f_{k(3)}$ sur K. On construit ainsi par récurrence une suite $k(m)$ ($m \in \mathbb{N}$) satisfaisant à l'énoncé.

b) Etablissons d'abord que f est réel et croissant sur $[a, b]$. De fait, f est la limite ponctuelle de fonctions réelles, donc est réel. De plus, si x et y sont deux éléments de $[a, b]$ tels que $x \leq y$, alors $f_m(x) \leq f_m(y)$ pour tout m. Par passage à la limite, on obtient $f(x) \leq f(y)$. Cela étant, soit $\epsilon > 0$. D'une part, comme f est continu sur le compact $[a, b]$, f est uniformément continu sur $[a, b]$. D'où il existe $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$(x, y \in [a, b] \text{ et } |x - y| \leq \eta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit alors un naturel $J = J(\epsilon)$ tel que $(b - a) \leq \eta\, J$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, J)$, posons $x_j = a + (j/J)(b - a)$. Il s'ensuite que pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, on a $0 < x_j - x_{j-1} < \eta$; dès lors pour tout $x \in [x_{j-1}, x_j]$, on a

$$f(x) - f(x_{j-1}) = |f(x) - f(x_{j-1})| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ et } f(x_j) - f(x) = |f(x) - f(x_j)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $f_m(x) \to f(x)\ \forall x \in K$ et comme les x_j ($j \in \{0, \ldots, J\}$) sont en nombre fini, il existe $M = M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_m(x_j) - f(x_j)| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ pour tous } j \in \{0, \ldots, J\} \text{ et } m \geq M. \ (\star\star)$$

Finalement, soient $x \in [a, b]$ et $j \in \{1, \ldots, J\}$ tels que $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Pour tout $m \geq M$, vu $(\star\star)$ et $(\star)$ et vu la croissance de la fonction f_m (pour tout m), on obtient

$$f_m(x) \leq f_m(x_j) \leq f(x_j) + \epsilon/2 \leq f(x) + \epsilon$$

et

$$f_m(x) \geq f_m(x_{j-1}) \geq f(x_{j-1}) - \epsilon/2 \geq f(x) - \epsilon$$

donc $|f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Par conséquent, on a

$$\sup\{|f_m(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} \leq \epsilon$$

d'où la conclusion. □

Remarque: Le résultat (b) de l'exercice précédent s'applique à la suite

$$f_m = (1 - \frac{1}{m})\chi_{[0,1/m[} + \chi_{[1/m,1[}$$

et à la fonction $f = \chi_{[0,1]}$ sur $[a, b] = [0, 1]$ alors que dans ce cas le théorème de Dini ne s'applique pas.

Exercice 2.9

a) Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$, A une partie de $\mathbb{R}^m$ et f une fonction continue sur $K \times A$. Alors l'ensemble $\{f(x,.) : x \in K\}$ est une partie équicontinue de $C_0(A)$.

b) Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset C_0(A)$. Etablir que F est uniformément équicontinu sur A si et seulement si, pour toutes suites $f_m \in F$, $x_m, y_m \in A$ $(m \in \mathbb{N})$ telles que $\lim_m x_m - y_m = 0$, on a $\lim_m(f_m(x_m) - f_m(y_m)) = 0$.

c) Si f est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\{f(. + h) : h \in \mathbb{R}^n\}$$

est un ensemble uniformément équicontinu sur $\mathbb{R}^n$.

d) L'ensemble $\{x^m : m \in \mathbb{N}\}$ est-il uniformément équicontinu sur $[0, 1]$?

Solution: a), b) et c) sont directs.

d) La suite $f_m(x) = x^m$ $(m \in \mathbb{N})$ converge ponctuellement vers $\chi_{\{1\}}$ sur $[0, 1]$. Vu la discontinuité de $\chi_{\{1\}}$ sur $[0, 1]$ et vu le théorème d'Arzela-Ascoli, l'ensemble $\{x^m : m \in \mathbb{N}\}$ ne peut pas être uniformément équicontinu sur $[0, 1]$. □

Exercice 2.10 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit une fonction $K \in C_0([a, b] \times [a, b])$. Etablir que l'opérateur

$$T : C_0([a, b]) \to C_0([a, b]) \; f \mapsto \int_a^b f(x)K(x, y)dx$$

est compact (l'espace $C_0([a, b])$ est muni de la topologie définie par la norme $\| \cdot \| = \sup_{a \leq x \leq b} |.(x)|$).

Solution: On vérifie directement que T est un opérateur bien défini et linéaire. Cela étant, pour prouver que l'image par T de la boule unité b de $C_0([a, b])$ est d'adhérence compacte dans $C_0([a, b])$, il suffit de prouver que Tb est précompact dans $C_0([a, b])$ ou encore, vu le théorème d'Arzela-Ascoli, que Tb est ponctuellement borné et équicontinu sur $[a, b]$. Ceci résulte directement de la continuité uniforme de K sur $[a, b] \times [a, b]$. □

Exercice 2.11

a) Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^n$ (resp. tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$) et tout $f \in C_0(F)$ (resp. $f \in C_0(\Omega)$), il existe une suite P_m ($m \in \mathbb{N}$) de polynômes telle que $P_m \underset{K}{\rightrightarrows} f$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ inclus dans F (resp. dans Ω).

b) La fonction caractéristique de l'ensemble $\{(x, y) : x \geq 0\}$ est limite ponctuelle d'une suite de polynômes P_m

Solution: a) Soit K_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite fondamentale de compacts de F (resp. de Ω). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une suite $P_m^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) de polynômes telle que $\| P_m^{(k)} - f \|_{K_m} \leq 1/k$ ($k \in \mathbb{N}$). On vérifie alors directement que la suite $Q_m := P_m^{(m)}$ convient.

b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons $K_m^{(1)} := [-m, -1/m] \times [-m, m]$, $K_m^{(2)} := [0, m] \times [-m, m]$ et $K_m := K_m^{(1)} \cup K_m^{(2)}$. La fonction f_m définie sur K_m par $f_m(x, y) = \chi_{K_m^{(2)}}$ est continue sur K_m; par conséquent, il existe un polynôme P_m tel que $\|f_m - P_m\|_{K_m} < 1/m$. On vérifie alors directement que la suite P_m ($m \in \mathbb{N}$) convient. □

Exercice 2.12

a) Etablir que la fonction $f(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} 1/(x + m)^2$ appartient à $C_\infty(]0, +\infty[)$ et que ses dérivées peuvent être calculées terme à terme.

b) Etablir que la fonction $f(x) := \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-mx}/(1 + m^2)$ appartient à $C_0([0, +\infty[) \cap C_\infty(]0, +\infty[)$ et que ses dérivées se calculent terme à terme.

c) Etablir que la fonction $f(x) := \sum_{m=1}^{+\infty} (1 + x^2)^{-m}$ appartient à C_1 $(\complement\{0\})$ et que sa dérivée se calculent terme à terme. En déduire la valeur de $S = \sum_{m=1}^{+\infty} m 2^{-m}$.

d) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, et tout $k \in \mathbb{N}$, posons $C_\alpha^k := \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)(k!)^{-1}$; posons aussi $C_\alpha^0 := 1$. Etablir que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} C_\alpha^k x^k.$$

Solution: a), b), et c). Il suffit de démontrer que

(i) la série des dérivées p-ièmes (avec $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pour a) et b); $p = 0, p = 1$ pour c)) converge uniformément sur tout compact de $]0, +\infty[$ (pour a),b) et c)) et de $] - \infty, 0[$ (pour c));

(ii) la série $\sum_{m=1}^{+\infty} e^{-mx}/(1 + m^2)$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

d) Voici un procédé permettant de résoudre d) : établir que la somme de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_\alpha^k \frac{x^k}{(1 + x)^\alpha}$$

appartient à $C^1(]-1, 1[)$, est dérivable terme à terme et que sa dérivée est nulle sur $]-1, 1[$; conclure par le théorème de l'ouvert connexe. □

Exercice 2.13 On sait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$, on a

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{m=0}^{+\infty} C_\alpha^k x^k \quad x \in]-1, 1[$$

avec

$$C_\alpha^0 = 1 \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

Etudier le convergence ponctuelle et uniforme de la série $\sum_{m=0}^{+\infty} C_\alpha^k x^k$ en fonction des valeurs de α.

Solution: Pour tout α, par le critère du quotient, on a

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|C_\alpha^{k+1}||x|}{|C_\alpha^k|} = |x|.$$

Dès lors, la série est absolument convergente pour $x \in]-1, 1[$ et diverge si $x \notin [-1, 1]$. Etudions donc le cas $|x| = 1$ en fonction des valeurs de α.

Pour tout k suffisamment grand, on a

$$|C_\alpha^k| \leq |C_\alpha^{k+1}| \Longleftrightarrow \alpha \leq -1.$$

Dès lors, pour $|x| = 1$ et $\alpha \leq -1$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0 (on obtient 1^+ dans le critère du quotient).

Pour étudier le cas $\alpha > -1$ (i.e. 1^- obtenu par le critère du quotient), appliquons le second critère du quotient(*):
une série à termes strictement positifs $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$

converge si $\lim_m m\left(\frac{x_m}{x_{m+1}}-1\right)>1$
diverge si $\lim_m m\left(\frac{x_m}{x_{m+1}}-1\right)<1$ ou 1^-.

Dans notre cas, pour $k>>$,

$$k\left(\frac{|C_\alpha^k|}{|C_\alpha^{k+1}|}-1\right)=k\left(\frac{k+1}{|\alpha-k|}-1\right)=\frac{k(\alpha+1)}{k-\alpha}\to\alpha+1 \text{ si } k\to+\infty.$$

Dès lors, dans le cas $\alpha>-1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\left|C_\alpha^k\right|$ est convergente si et seulement si $\alpha>0$.

Pour terminer cet exercice, il nous reste à voir si $\sum_{k=0}^{+\infty}C_\alpha^k x^k$ (**) est convergente pour $\alpha\in\,]-1,0[\,,\ x=\pm1$.

On a

$$C_\alpha^k=\frac{\alpha\ldots(\alpha-k+1)}{k!}=(-1)^k\left|C_\alpha^k\right|$$

donc la série (**) diverge pour $x=-1$. Pour $x=1$, il s'agit d'une série alternée. Comme on est dans le cas $\alpha>-1$, on sait déjà que la suite $|C_\alpha^k|$ est décroissante. De plus, elle converge vers 0 car on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{|C_\alpha^k|} &= \prod_{j=1}^{k}\frac{j}{j-(\alpha+1)}\\ &= \prod_{j=1}^{k}\frac{j(j+1+\alpha)}{j^2-(\alpha+1)^2}\\ &\geq \prod_{j=1}^{k}\frac{j+1+\alpha}{j}=\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{\alpha+1}{j}\right)\\ &\geq 1\ +\ (\alpha+1)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\to+\infty \text{ si } k\to+\infty.\end{aligned}$$

Ce qui précède concerne la convergence simple de la série

$$S_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}C_\alpha^k x^k.$$

Etudions sa convergence uniforme sur les sous-intervalles de l'intervalle d'extrémités -1 et 1.

On sait déjà que pour tout α, la série est uniformément (et même normalement) convergente sur $[-r,r]$ ($r\in\,]0,1[$). Voyons si on peut améliorer la convergence en fonction des valeurs de α.

Cas $\alpha > 0$. La série S_α converge uniformément (et même normalement) sur $[-1,1]$ car la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |C_\alpha^k|$ converge.

Cas $\alpha \in]-1,0[$. La série S_α ne converge pas normalement sur $[r,1]$ ($r \in [-1,1]$) car la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |C_\alpha^k|$ diverge. Cependant, par le critère d'Abel, elle converge uniformément sur $[0,1]$. De plus, elle ne converge pas uniformément sur les intervalles du type $]-1,-r]$ ($r \in]0,1[$) car chacune des sommes partielles est bornée sur ce type d'intervalle alors que la limite $(1+x)^\alpha$ ne l'est pas.

Cas $\alpha \leq -1$. La série S_α ne converge pas uniformément sur les intervalles du type $]-1,-r]$ ($r \in]0,1[$) car chacune des sommes partielles est bornée sur ce type d'intervalle alors que la limite $(1+x)^\alpha$ ne l'est pas. De plus, elle ne converge pas non plus uniformément sur le intervalles du type $[r,1[$ ($r \in]0,1[$) car

$$\begin{aligned}\sup_{r\leq x<1}\left|(1+x)^\alpha - \sum_{k=0}^{M} C_\alpha^k x^k\right| &= \sup_{r\leq x\leq 1}\left|(1+x)^\alpha - \sum_{k=0}^{M} C_\alpha^k x^k\right| \quad \text{(fcn. cont.!)} \\ &\geq \left|(1+1)^\alpha - \sum_{k=0}^{M} C_\alpha^k\right| > R > 0\end{aligned}$$

pour une infinité de valeurs de M (comme la suite $\sum_{k=0}^{M} C_\alpha^k$ ne converge pas, elle ne converge pas vers 2^α; d'où un $R > 0$ comme ci-dessus).

(*) Le second critère du quotient permet parfois de conclure là où le critère du quotient ne donne rien : par exemple pour la série de terme général $(am+b)^{-1}$ $(a, b > 0)$. □

Exercice 2.14 a) Développer les fonctions suivantes en série de puissances de x:

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad g(x) = \arctan(x) \qquad h(x) = \arcsin(x).$$

Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des séries obtenues.

b) Sachant que

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{B_m}{m!} z^m \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\pi$$

où les B_m sont les nombres de Bernoulli, c'est-à-dire

$$B_0 = 1,\ B_m = -\sum_{k=1}^{m} \frac{C_m^k B_{m-k}}{k+1} \quad m \in \mathbb{N},$$

développer la fonction $\tan(x)$ en série de puissances de x.

c) Soit $S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} x^m$ et soit $p \in \mathbb{N}$. Développer la fonction S^p en série de puissances de x.

Solution: a) *Cas de* $\ln(1+x)$.

La fonction $\ln(1+x)$ appartient à $C_\infty(]-1,+\infty[)$ et

$$D_x \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m x^m \quad \forall x \in]-1,1[\,.$$

Considérons alors la fonction

$$S(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} x^{m+1}.$$

Cette fonction S est définie sur $]-1,1[$ et la suite

$$D_x \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m}{m+1} x^{m+1} = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m x^m \ (M \in \mathbb{N})$$

converge uniformément sur tout compact de $]-1,1[$. Il s'ensuit que $S \in C_1(]-1,1[)$ et

$$D_x S(x) = \lim_M D_x \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m}{m+1} x^{m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m x^m = D_x \ln(1+x) \quad \forall x \in]-1,1[\,.$$

Dès lors il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(1+x) = r + S(x) \quad \forall x \in]-1,1[\,.$$

Pour $x=0$, on obtient $r=0$, d'où le développement de $\ln(1+x)$.

La série $S(x)$ converge absolument en tout $x \in]-1,1[$, est semi-convergente pour $x=1$ (série alternée) et diverge sinon. De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle du type $[-1+\varepsilon,1]$ $(0<\varepsilon<1)$ car $[-1+\varepsilon,0]$ est un intervalle compact de $]-1,1[$ et

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{m=p}^{q} \frac{(-1)^m}{m+1} x^m \right| \leq \frac{1}{p+1}$$

par la majoration des séries alternées. On en déduit notamment que S est continu sur $]-1,1]$, donc que

$$\ln(1+x) = S(x) \quad \forall x \in]-1,1]\,.$$

Cependant, la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,-1+\varepsilon[$ car chacune des sommes partielles est une fonction bornée sur cet intervalle alors que $\ln(1+x)$ ne l'est pas.

Bien sûr, vu la question, il serait naturel de se demander ce que donne le développement de Taylor en 0 de la fonction $\ln(1+x)$.

On ne peut pas obtenir facilement la convergence vers 0 du reste pour toutes les valeurs de $x \in]-1,1[$ (cela se passe de façon directe seulement pour $x \in]-1/2,1[$). Cependant, la formule intégrale de Taylor permet, elle, de conclure très facilement. En effet, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{M} \frac{(-1)^{m+1}}{m} x^m + R(x,M)$$

où

$$R(x,M) = x^{M+1} \int_0^1 dt\ \frac{(1-t)^M}{M!} (D^{M+1} \ln(1+.))(tx).$$

Comme

$$x^{M+1} \frac{(1-t)^M}{M!} (D^{M+1} \ln(1+.))(tx) = (-1)^M x^{M+1}\ \frac{(1-t)^M}{(1+tx)^{M+1}}$$

et comme

$$0 < 1-t < 1+tx \quad \forall t \in]0,1[\,,\ x > -1$$

on obtient

$$\left| x^{M+1} \frac{(1-t)^M}{(1+tx)^{M+1}} \right| \leq \frac{|x^{M+1}|}{1+tx}.$$

Si $x \in]-1,1[$, on a dès lors

$$|R(x,M)| \leq |x|^{M+1} \int_0^1 dt\ \frac{1}{1+tx} \to 0 \text{ si } M \to +\infty.$$

Cas de $\arctan(x)$.

La fonction $\arctan(x)$ appartient à $C_\infty(\mathbb{R})$ et est telle que

$$D_x \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m x^{2m} \quad \forall x \in]-1,1[\,.$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient

$$\arctan(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{2m+1} \quad \forall x \in]-1,1[\,.$$

La série $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{2m+1}$ converge absolument pour $x \in \,]-1,1[$, est semi-convergente pour $x = \pm 1$ (série alternée) et diverge sinon. De plus, la convergence est uniforme sur $[-1,1]$ car (fonction impaire !)

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \sum_{m=p}^{q} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{2m+1} \right| \leq \sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{m=p}^{q} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{2m} \right| \leq \frac{1}{2p+1}$$

par la majoration des séries alternées. La fonction $S_1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{2m+1}$ est donc continue sur $[-1,1]$ et vérifie

$$\arctan(x) = S_1(x) \quad \forall x \in [-1,1]\,.$$

On peut utiliser ce qui précède pour obtenir des approximations de π. De fait,

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

avec

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m}{2m+1} \right| \leq \frac{1}{2M+3}.$$

On peut aussi remarquer que

$$\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$$

donc

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m}{2m+1} \left(\frac{1}{2^{2m+1}} - \frac{1}{3^{2m+1}} \right) \right| \leq \frac{1}{2M+3} \left(\frac{1}{2^{2M+3}} - \frac{1}{3^{2M+3}} \right)$$

ce qui est une meilleure approximation à l'ordre M.

Cas de $\arcsin(x)$.

La fonction $\arcsin(x)$ appartient à $C_\infty(]-1,1[) \cap C_0([-1,1])$ et vérifie

$$D_x \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{m=0}^{+\infty} C_{-1/2}^m x^{2m} \quad \forall x \in \,]-1,1[$$

avec

$$C_{-1/2}^m = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Remarquons que l'on a

$$C_{-1/2}^m = (-1)^m \frac{S_{2m}}{\sqrt{\pi m}(S_m)^2}, \text{ avec } S_m := \frac{m!}{e^{-m} m^m \sqrt{2\pi m}}.$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient

$$\arcsin(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{C_{-1/2}^m}{2m+1} x^{2m+1} \quad \forall x \in \,]-1,1[\,.$$

La série $S_2(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{C_{-1/2}^m}{2m+1} x^{2m+1}$ est absolument convergente pour $x \in \,]-1,1[$ et est semi-convergente pour $x = \pm 1$. La convergence est même uniforme (et même normale) sur $[-1,1]$ car

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \sum_{m=p}^{q} \frac{C_{-1/2}^m}{2m+1} x^{2m+1} \right| \le \sum_{m=p}^{q} \frac{|C_{-1/2}^m|}{2m+1}$$

avec

$$m^{3/2} \frac{|C_{-1/2}^m|}{2m+1} \to l \in \mathbb{R}$$

car $\lim_{m\to+\infty} S_m = 1$. On obtient donc finalement

$$\arcsin(x) = S_2(x) \quad \forall x \in [-1,1]\,.$$

b) Pour $x \neq k\pi/2$, on a

$$\begin{aligned} \tan(x) &= -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \\ &= -i \frac{e^{2ix} + 1 - 2}{e^{2ix} + 1} \\ &= -i + 2i \frac{e^{2ix} + 1 - 2}{e^{4ix} - 1} \\ &= -i + \frac{2i}{e^{2ix} - 1} - \frac{4i}{e^{4ix} - 1}. \end{aligned}$$

Dès lors, pour $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$, en prenant la partie réelle, on a

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \mathcal{R}(-i + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_m}{m!} \left(2^m - 4^m\right) i^m x^{m-1}) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(2^{2m} - 4^{2m}\right) (-1)^m x^{2m-1}. \end{aligned}$$

c) S est défini pour $x \in \,]-1,1[$ et on a

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Il s'ensuit que

$$S^p(x) = (1+x)^{-p} = \sum_{m=0}^{+\infty} C_{-p}^m x^m \quad \forall x \in]-1,1[\,.$$

□

Exercice 2.15 Considérons la fonction $\arg(z)$ définie dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$ et à valeurs dans $]-\pi, \pi[$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$, on pose alors

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ ou $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$, on a aussi (cf. fcts holomorphes)

$$\ln(1-z) = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m}.$$

En déduire le développement des fonctions $\ln(2\sin(\theta/2))$ et $(\pi-\theta)/2$ en termes de $\sin(m\theta)$, $\cos(m\theta)$ (série trigonométrique de Fourier, voir plus tard).

Solution: Pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, on a

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta} &= 1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta) \\ &= 2\sin^2(\theta/2) - 2i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ &= 2\sin(\theta/2)\left(\cos(\frac{\pi-\theta}{2}) - i\sin(\frac{\pi-\theta}{2})\right). \end{aligned}$$

Comme $(\theta-\pi)/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a

$$|1-e^{i\theta}| = 2\sin(\theta/2) \qquad \arg(1-e^{i\theta}) = \frac{\theta-\pi}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} \ln(2\sin\frac{\theta}{2}) &= \ln(|1-e^{i\theta}|) = \mathcal{R}\ln(1-e^{i\theta}) \\ \frac{\pi-\theta}{2} &= -\arg(1-e^{i\theta}) = -\mathcal{I}\ln(1-e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\ln(2\sin\frac{\theta}{2}) = -\mathcal{R}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{e^{im\theta}}{m} = -\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\cos(m\theta)}{m}$$

et

$$\frac{\pi-\theta}{2}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin(m\theta)}{m}.$$

Remarque. La théorie des fonctions holomorphes donne le développement

$$\ln(1-z)=-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{z^m}{m} \tag{2.1}$$

pour $|z|<1$. Pour obtenir l'égalité en $z=e^{i\theta},\ \theta\in\,]0,2\pi[$, on peut procéder comme suit. Pour tout $r\in[0,1[$, on a

$$\ln(1-re^{i\theta})=-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{r^me^{im\theta}}{m}.$$

Comme les fonctions arg et $\ln(|.|)$ sont continues en $1-e^{i\theta}$, on a

$$\lim_{r\to1^-}\ln(1-re^{i\theta})=\ln(1-e^{i\theta}).$$

De plus, la série $S(r)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{r^me^{im\theta}}{m}$ converge uniformément sur $[0,1]$ car pour tout $r\in[0,1]$, on a

$$\left|\sum_{m=p}^{q}\frac{r^me^{im\theta}}{m}\right|\le\frac{r^p}{p|\sin(\theta/2)|}\le\frac{1}{p|\sin(\theta/2)|}$$

vu la majoration d'Abel. Il s'ensuit que la fonction $S(r)$ est continue sur $[0,1]$. D'où la conclusion. □

Exercice 2.16 a) Montrer que

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}\left\{\begin{array}{l}\cos(my)\\ \sin(my)\end{array}\right. = e^{x\cos(y)}\left\{\begin{array}{l}\cos(x\sin(y))\\ \sin(x\sin(y))\end{array}\right. \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

et que, pour tous $x,y\in\mathbb{R},\ |x|<1$,

$$\sum_{m=0}^{+\infty}x^m\left\{\begin{array}{l}\cos(my)\\ \sin(my)\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1-x\cos(y)}{1-2x\cos(y)+x^2}\\ \dfrac{x\sin(y)}{1-2x\cos(y)+x^2}\end{array}\right.$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{x^m}{m}\left\{\begin{array}{l}\cos(my)\\ \sin(my)\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}(-1/2)\ln(1-2x\cos(y)+x^2)\\ \arctan(\dfrac{x\sin(y)}{1-x\cos(y)})\end{array}\right.$$

b) Développer le noyau de Poisson

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2} \qquad (r,x) \in]-1,1[\times \mathbb{R}$$

en série de puissances de r. Démontrer que pour tout $\varepsilon \in]0,\pi[$, $P_r \underset{[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]}{\Longrightarrow} 0$ si $r \to 1^-$.

Solution: a) *Première série.* Comme $|x^m/(m!)\cos(my)|$, $|x^m/(m!)\sin(my)| \leq |x^m|/(m!)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, la convergence est assurée. Pour en calculer la somme, on peut procéder comme suit : on a

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} e^{imy} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(xe^{iy})^m}{m!} \\ &= e^{xe^{iy}} = e^{x\cos(y)} e^{ix\sin(y)}; \end{aligned}$$

d'où la conclusion en passant aux parties réelles et imaginaires.

Deuxième série. Comme le module du terme général est majoré par $|x|^m$, la convergence est assurée pour $|x| < 1$ et $y \in \mathbb{R}$. Cela étant, on a

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} x^m e^{imy} &= \sum_{m=0}^{+\infty} (xe^{iy})^m \\ &= \frac{1}{1-xe^{iy}} \\ &= \frac{1-x\cos(y)+i\sin(y)}{1+x^2-2x\cos(y)}; \end{aligned}$$

d'où la conclusion en passant aux parties réelles et imaginaires.

Troisième série. Comme le module du terme général est majoré par $|x^m|/m$, la convergence de la série est assurée pour $|x| < 1$ et $y \in \mathbb{R}$. Cela étant, on a

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m} e^{imy} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(xe^{iy})^m}{m} \\ &= -\ln(1-xe^{iy}) \\ &= -\ln|1-xe^{iy}| - i\arg(1-xe^{iy}). \end{aligned}$$

Comme $1 - xe^{iy} = 1 - x\cos(y) - ix\sin(y)$ et $1 - x\cos(y) > 0$, on a $|1-xe^{iy}| = (1+x^2-2\cos(y))^{1/2}$ et $\arg(1-x\cos(y)) = \arctan\left(\frac{x\sin(y)}{1-x\cos(y)}\right)$. D'où la conclusion en passant aux parties réelles et imaginaires.

b) On a $1 - 2r\cos(x) + r^2 = |1 - re^{ix}|^2$ et $0 < 1 - r\cos(x) = \mathcal{R}(1 - r\cos(x) + i\sin(x))$. Il s'ensuit que $1 - 2r\cos(x) + r^2 = |1 - re^{ix}|^2 \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2} &= \frac{2 - 2r\cos(x) - 1 - r^2 + 2r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2} \\
&= -1 + \frac{2 - 2r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2} \\
&= -1 + 2\mathcal{R}\frac{1 - re^{-ix}}{|1 - re^{ix}|^2} \\
&= -1 + 2\mathcal{R}\frac{1}{1 - re^{ix}}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{1}{1 - re^{ix}} = \sum_{m=0}^{+\infty} r^m e^{imx}$$

on en déduit que

$$P_r(x) = 1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} r^m \cos(mx).$$

Démontrons à présent le résultat concernant la convergence uniforme. Pour tout $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, on a $\cos(x) \leq \cos(\varepsilon)$, donc

$$1 - 2r\cos(x) + r^2 \geq 1 - 2r\cos(\varepsilon) + r^2 = (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos(\varepsilon)) \geq 2r(1 - \cos(\varepsilon)).$$

Dès lors, pour tout $r \in [1/2, 1[$, on a

$$0 \leq \sup_{x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} P_r(x) \leq \frac{1 - r^2}{1 - \cos(\varepsilon)}.$$

D'où la conclusion. □

Exercice 2.17 Soit

$$S(x) = \lim_{M \to +\infty} \sum_{m=1}^{M} \frac{x^m}{m^2}.$$

a) Où la fonction S est-elle définie, continue, dérivable?
b) Etablir qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$S(x) + S(1 - x) = a - \ln(x)\ \ln(1 - x) \quad \forall x \in \,]0, 1[\,.$$

c) Etablir que

$$a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$$

et que

$$a - (\ln 2)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 2^{m-1}}.$$

Solution: a) Les critères du quotient et de Riemann nous apprennent que la série est absolument convergente pour $x \in [-1,1]$ et diverge sinon. De plus, comme le module du terme général est majoré par m^{-2}, la convergence est uniforme sur $[-1,1]$. La fonction S est donc continue sur $[-1,1]$. Enfin, comme la suite $\sum_{m=1}^{M} x^{m-1}/m$ est absolument convergente sur tout intervalle compact de $]-1,1[$, on en déduit que la fonction S appartient à $C_1(]-1,1[)$.

b) Les fonctions $S(x)$, $S(1-x)$, $\ln(x)$, $\ln(1-x)$ appartiennent à $C_1(]0,1[)$ et $S(x)$ et $S(1-x)$ sont dérivables terme à terme. Dès lors, pour tout $x \in]0,1[$, on a successivement

$$\begin{aligned}
D_x S(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{m} \\
D_x S(1-x) &= -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^{m-1}}{m} \\
D_x S(x) + D_x S(1-x) &= -\frac{1}{x}\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\ln(x) \\
&= -D_x\left(\ln(1-x)\ln(x)\right).
\end{aligned}$$

Il existe donc un nombre réel a tel que

$$S(x) + S(1-x) = a - \ln(1-x)\ln(x) \quad \forall x \in]0,1[\,. \tag{2.2}$$

c) Les fonctions $S(x)$ et $S(1-x)$ sont continues sur $[0,1]$ et on a

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(1-x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x)\frac{\ln(1-x)}{x} = 0.$$

Par passage à la limite dans (2.2), on obtient

$$S(1) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = a.$$

Enfin, en évaluant (2.2) en $x = 1/2$, on obtient

$$2S(\frac{1}{2}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 2^m} = a - \ln^2(2).$$

□

Exercice 2.18 Soit P un polynôme de degré $M \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(m) x^m$$

pour tous les x possibles.

Solution: On a $P(m) \neq 0 \ \forall m >>$,

$$\lim_{m\to+\infty} \left| \frac{P(m+1)}{P(m)} \right| = 1$$

et $\lim_{m\to+\infty} P(m) = \infty$. La série converge donc pour $x \in]-1, 1[$ et diverge sinon. Soit

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_M x^M, \quad a_M \neq 0.$$

Montrons qu'il existe des coefficients $b_0, \ldots, b_M$ tels que

$$P(x) = b_0 + b_1(x+1) + \ldots + b_M(x+1)\ldots(x+M) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De fait, s'il existe de tels b_j, on a

$$\begin{array}{rcl} P(-1) & = & b_0 \\ P(-2) & = & b_0 - b_1 \\ \ldots & & \ldots \\ P(-M) & = & \text{combinaison linéaire de } b_0, \ldots, b_{M-1} \\ P(0) & = & \text{combinaison linéaire de } b_0, \ldots, b_M \end{array}$$

ce qui les détermine univoquement. De plus, si on considère les $b_0, \ldots, b_M$ déterminés par ce système d'équations, on a l'égalité

$$P(x) = b_0 + b_1(x+1) + \ldots + b_M(x+1)\ldots(x+M) \ \text{ pour } x = 0, -1, \ldots, -M,$$

ce qui est une égalité entre deux polynômes de degré M en $M+1$ valeurs. On obtient donc que cette égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et même $x \in \mathbb{C}$).

Cela étant, sommons la série. Pour tout $j = 1, \ldots, M$ et tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)\ldots(m+j)x^m &= D_x^j \sum_{m=0}^{+\infty} x^{m+j} \\
&= D_x^j \frac{x^j}{1-x} = D_x^j \frac{x^j - 1 + 1}{1-x} \\
&= -D_x^j \left(\sum_{m=0}^{j-1} x^m\right) + D_x^j \frac{1}{1-x} \\
&= D_x^j \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

(la dérivation sous le signe somme étant justifiée par le fait que la série des dérivées terme à terme converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$, donc uniformément sur tout compact de $]-1, 1[$). Dès lors, pour tout $x \in]-1, 1[$, on obtient

$$\sum_{m=0}^{+\infty} P(m)x^m = \sum_{j=0}^{M} b_j D_x^j \frac{1}{1-x}.$$

□

Exercice 2.19 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!} = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m.$$

Solution: Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{z^k}{m^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ posons

$$u_k(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq 1 \\ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right) & \text{si } 2 \leq k \leq m \\ 0 & \text{si } k > m. \end{cases}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} u_k(m) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} u_k(m).$$

Pour conclure, il reste à prouver que

$$\lim_{m\to+\infty} u_k(m) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

et que l'on peut permuter les limites.

De fait, pour tout $k \geq 2$ et pour $m \geq k$, $u_k(m)$ est le produit de $k-1$ facteurs qui sont tous inférieurs à 1 et qui tendent tous vers 1 si $m \to +\infty$. La première chose est donc prouvée.

De plus, la suite

$$F_M(.) = \sum_{k=0}^{M} \frac{z^k}{k!} u_k(.) \quad (M \in \mathbb{N})$$

converge uniformément sur $\mathbb{N}$ car on a

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{|z^k|}{k!} u_k(m) \leq \frac{|z^k|}{k!} = \text{ terme général d'une série convergente.}$$

$\square$

Chapitre 3

Intégrales particulières

Exercice 3.1 Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay}}{\sqrt{y}} dy \ (a > 0)$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-ay} dy \ (a > 0)$

(*Suggestion:* a) Effectuer le changement de variables $x = \sqrt{y}$ et appliquer Poisson.
b) Effectuer le même changement de variables puis intégrer par partie en remarquant que $D_y e^{-ay^2} = -2aye^{-ay^2}$, puis conclure par Poisson.)

Exercice 3.2 Calculer les limites suivantes pour $p \in \mathbb{N}_0$

a) $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{(m!)^{1/m}}{m}$ b) $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m)$

c) $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} (m!)^{\frac{1}{m \ln(m)}}$ d) $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{(m!)^2}{(m-p)!(m+p)!}$

e) $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{m!p!}{(m+p)!} \right)^{1/m}$

(*Suggestion:* Posons $S_n = (n!)/(e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n})$ pour $n > 0$. La formule de Stirling montre que la suite S_n converge vers 1. Pour obtenir les limites demandées, tout revient à transformer les factorielles qui y interviennent grâce à la formule $n! = S_n e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ et calculer la nouvelle limite par les méthodes usuelles.

a) Il est clair que

$$\frac{(m!)^{1/m}}{m} = S_m^{1/m} e^{-1} (2\pi m)^{1/2m}$$

Or nous savons que $a^{1/m} \to 1$ si $a > 0$, que $m^{1/m} \to 1$ et que $x_m^{1/m} \to 1$ si $x_m \to 1$. Il en résulte que la limite cherchée est égale à $1/e$.

b) En utilisant les propriétés du logarithme, on voit que

$$\frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) = \ln(\frac{(m!)^{1/m}}{m})$$

Tenant compte de a), on en déduit que la limite proposée est égale à $\ln(1/e) = -1$.

c) On dispose de la formule

$$\begin{aligned}(m!)^{\frac{1}{m\ln(m)}} &= S_m^{\frac{1}{m\ln(m)}} e^{\frac{-1}{\ln(m)}} m^{\frac{1}{\ln(m)}} (2\pi m)^{\frac{1}{2m\ln(m)}} \\ &= S_m^{\frac{1}{m\ln(m)}} e^{\frac{-1}{\ln(m)}} e (2\pi)^{\frac{1}{2m\ln(m)}} e^{\frac{1}{2m}}\end{aligned}$$

De cette dernière relation, on déduit aisément que la limite cherchée est égale à e.

Variante. En posant

$$a_m = \frac{(m!)^{1/m}}{m}$$

on a

$$\begin{aligned}(m!)^{1/(m\ln(m)} &= \left(\frac{(m!)^{1/m}}{m}\right)^{1/\ln(m)} m^{1/\ln(m)} \\ &= e^{\frac{\ln(a_m)}{\ln(m)}} e^{\frac{\ln(m)}{\ln(m)}} \\ &= e\, e^{\frac{\ln(a_m)}{\ln(m)}} \to e \text{ si } m \to +\infty\end{aligned}$$

car $\lim_m a_m = e^{-1}$ vu a).

d) Si $p \in \mathbb{N}_0$, on a les formules

$$\begin{aligned}\frac{m!m^p}{(m+p)!} &= \frac{1}{(1+\frac{1}{m})\dots(1+\frac{p}{m})} \\ \frac{m!m^{-p}}{(m-p)!} &= (1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{p-1}{m})\end{aligned}$$

Ce qui montre aussitôt que la limite cherchée vaut 1.

e) On dispose de la formule

$$\left(\frac{m!p!}{(m+p)!}\right)^{1/m} = \left(\frac{m!m^p}{(m+p)!}\right)^{1/m} (p!m^{-p})^{1/m}$$

Tenant compte de la formule utilisée en d) et de ce que $m^{1/m} \to 1$ on voit que la limite cherchée vaut 1.)

Exercice 3.3 Exprimer $\Gamma(2/6)$ et $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

Solution: D'une part la formule d'Euler donne

$$B\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = 2\pi.$$

D'autre part, par la formule de Legendre :

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{4}{6}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{6}\right).$$

La formule d'Euler donne encore

$$\Gamma\left(\frac{2}{6}\right) \Gamma\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Il s'ensuit que

$$\Gamma\left(\frac{2}{6}\right) = \sqrt{2^{1/3}(\pi/3)^{1/2}\Gamma(1/6)}.$$

□

Exercice 3.4 Etablir que pour tout $m > 0$, $n > -1$, $a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m}\Gamma(\frac{n+1}{m})a^{-\frac{n+1}{m}}$$

(*Suggestion:* Effectuer le changement de variables $y = ax^m$ et utiliser la définition de Γ.)

Exercice 3.5 Posons

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x} \quad (x \in]1, +\infty[) \qquad \varphi(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^x} \quad (x \in]0, +\infty[).$$

Alors

a) $\varphi(x) = (2^{1-x} - 1)\, \zeta(x) \quad \forall x \in]1, +\infty[$

b) $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} dt\ \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \quad \forall x \in]1, +\infty[$.

Solution: Par le critère de Riemann, ζ (donc φ) existe pour $x > 1$; par le critère des séries alternées, φ est aussi défini (semi-convergence) pour $x \in]0, 1[$.

a) Pour tout $x > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^x} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m}}{(2m)^x} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)^x} \\
&= \frac{1}{2^x}\zeta(x) - \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^x} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m)^x} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m)^x} \right) \\
&= \frac{1}{2^x}\zeta(x) - \zeta(x) + \frac{1}{2^x}\zeta(x) \\
&= \left(2^{1-x} - 1\right)\zeta(x).
\end{aligned}$$

b) Considérons la fonction $f_x(t) = t^{x-1}/(e^t - 1)$ $t \in]0, +\infty[$. Pour $x > 1$, et pour $\theta \in]1, x[$, on a $2 - \theta < 1$ et

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^{2-\theta} t^{x-1}}{e^t - 1} = \lim_{t \to 0^+} t^{x-\theta} \frac{t}{e^t - 1} = 0.$$

Comme on a aussi

$$\frac{t^2 t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{e^{-t} t^2 t^{x-1}}{1 - e^{-t}} \leq 2e^{-t} t^{x+1}$$

si $t >>$, et comme $f_x(t) \in C(]0, +\infty[)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on conclut finalement à l'intégrabilité de $f_x(t)$ sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 1$.

Cela étant, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} dt\ f_x(t) &= \int_0^{+\infty} dt\ e^{-t} t^{x-1} \frac{1}{1 - e^{-t}} \\
&= \int_0^{+\infty} dt\ e^{-t} t^{x-1} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-mt} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dt\ e^{-(1+m)t} t^{x-1} \qquad (u = (m+1)t) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^x} \int_0^{+\infty} du\ e^{-u} u^{x-1} \\
&= \Gamma(x)\zeta(x).
\end{aligned}$$

(La permutation des signes somme et d'intégration est justifiée par exemple par le théorème de Lebesgue : pour tout $x > 0$, les fonctions $f_M(t) = e^{-t} t^{x-1} \sum_{m=0}^{M} e^{-mt}$

sont continues sur $]0, +\infty[$, positives, majorées par la fonction $t^{x-1}/(e^t - 1)$, intégrable sur $]0, +\infty[$.) □

Exercice 3.6 [*Définition de Gauss de* $\Gamma(x)$] Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{m \to +\infty} \frac{m^x m!}{x(x+1)\dots(x+m)}$$

Solution: Pour tout $x > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\Gamma(x+m+1) = (x+m)(x+m-1)\dots x\Gamma(x)$$

Il en résulte que

$$\frac{m^x m!}{x(x+1)\dots(x+m)} = \Gamma(x)\frac{m^x\Gamma(m+1)}{\Gamma(x+m+1)}$$

et la formule de Stirling permet de conclure. □

Exercice 3.7 Démontrer que pour tout $x > 0$, $a > 0$ on a

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a+1)}{\Gamma(x+a+1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m C_a^m}{x+m}$$

où on a posé

$$C_a^m = \frac{a(a-1)\dots(a-m+1)}{m!} \text{ si } m > 0 \text{ et } C_a^0 = 1$$

Remarquer également que ce développement est fini si a est entier et qu'il coïncide dans ce cas avec la décomposition de

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+a)}$$

en fractions simples.

Solution: La théorie des fonctions Bêta nous dit que

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a+1)}{\Gamma(x+a+1)} = \mathrm{B}(x, a+1) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^a du$$

Or on dispose du développement de Taylor

$$(1-u)^a = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m C_a^m u^m$$

et ce développement est uniformément et absolument convergent dans tout compact de $]-1,1[$ comme on s'en assure aisément (cf. Ex. 2.12). La série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m C_a^m u^{x-1+m}$$

converge donc partout sur $]0,1[$ vers $u^{x-1}(1-u)^a$. Remarquons à présent que pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{m=0}^{M} \int_0^1 |(-1)^m C_a^m u^{x-1+m}| du = \sum_{m=0}^{M} |C_a^m| \frac{1}{x+m}$$

Le critère de Riemann combiné au fait que la suite mC_a^m est bornée montre alors que la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^1 |(-1)^m C_a^m u^{x-1+m}| du$$

est convergente. Cela nous permet d'utiliser le critère d'intégrabilité des séries pour affirmer que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^m C_a^m u^{x-1+m} du = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^a du$$

De cette relation, on tire de suite que

$$\mathrm{B}(x, a+1) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m C_a^m \frac{1}{x+m}$$

ce qui permet de conclure. □

Exercice 3.8 Etudier la convergence des séries suivantes:

a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(m!)^2}{(2m)!\, m}(z-1)^m$ b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2\, m} z^m$

c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}(x)\, dx\Big) z^m$ d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} (1+x^2)^{-m}\, dx\Big) z^m$

e) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\int_0^1 (1-x^2)^m\, dx\Big) z^m$

Solution: a) La formule de Stirling montre que

$$a_m = \frac{(m!)^2}{(2m)!\, m} \sim \frac{e^{-2m}m^{2m}2\pi m}{e^{-2m}(2m)^{2m}\sqrt{2\pi 2m}m} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4^m\sqrt{m}}$$

On en déduit que $a_{m+1}/a_m \to 1/4$. Ainsi, le critère du quotient permet d'affirmer que la série étudiée est absolument convergente si $|z-1| < 4$ et divergente si $|z-1| > 4$. Pour $|z-1| = 4$, le terme général de la série des modules est $4^m a_m \sim \sqrt{\pi/m}$ et le critère de Riemann montre que cette série diverge. Quant à la série elle même, elle a pour terme général $4^m a_m e^{im\theta}$ où θ est l'argument de $z-1$. Il est clair que

$$\frac{4^{m+1}a_{m+1}}{4^m a_m} = \frac{4(m+1)^2 m}{(2m+1)(2m+2)(m+1)} = \frac{2m}{2m+1} < 1$$

Ainsi, $4^m a_m \downarrow 0$ et le critère de convergence des séries trigonométriques montre que la série est semi-convergente si $\theta \in]0, 2\pi[$. La série de départ est donc semi-convergente pour $|z-1| = 4$, $z-1 \neq 4$ et divergente pour $z-1 = 4$.

b) Une application de la formule de Stirling conduit à

$$a_m \sim \frac{e^{-2m}(2m)^{2m}\sqrt{2\pi 2m}}{2^{2m}e^{-2m}m^{2m}2\pi m\, m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}m^{-\frac{3}{2}}$$

d'où il découle par les critères du quotient et de Riemann que la série proposée est absolument convergente pour $|z| \leq 1$ et divergente pour $|z| > 1$.

c) Posons

$$a_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\, dx$$

et effectuons le changement de variables $y = \cos^2 x$. Il vient,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2}\int_0^1 y^{(m+\frac{1}{2})-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\, dy \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{B}(m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Tenant compte de la formule de Stirling, on voit que

$$a_m \sim \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{m}\Gamma(m)}{m\Gamma(m)} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}$$

D'où il découle que la série est absolument convergente si $|z| < 1$ et divergente si $|z| > 1$. Pour $|z| = 1$, le critère de Riemann montre que la série des modules diverge. Comme,

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{m+\frac{1}{2}}{m+1} < 1$$

il est clair que $a_m \downarrow 0$ et le critère de convergence des séries trigonométriques montre que la série étudiée est semi-convergente pour $|z| = 1$, $z \neq 1$ et divergente pour $z = 1$.

d) Posons

$$a_m = \int_0^{+\infty} (1 + x^2)^{-m}\, dx$$

et effectuons le changement de variables $y = (1 + x^2)^{-1}$. Il vient

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2}\int_0^1 y^{(m-\frac{1}{2})-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\, dy \\ &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \end{aligned}$$

et la formule de Stirling montre que

$$a_m \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}$$

On conclut alors comme en c) que la série proposée est absolument convergente pour $|z| < 1$, divergente pour $|z| > 1$ et pour $z = 1$ et semi-convergente pour $|z| = 1$, $z \neq 1$.

e) Posons

$$a_m = \int_0^1 (1 - x^2)^m\, dx$$

et effectuons le changement de variables $y = x^2$. Il vient

$$\begin{aligned} a_m &= \int_0^1 (1-y)^m \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy \\ &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\frac{3}{2})} \end{aligned}$$

La formule de Stirling donne alors

$$a_m \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}$$

et on conclut comme en d). $\square$

Exercice 3.9 Etablir les relations suivantes

$$\text{a)} \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \ln\sqrt{2\pi}$$
$$\text{b)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-px}}{\operatorname{ch}(x)}\,dx = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi p}{2})} \quad (p \in]-1,1[)$$

Solution: a) La fonction $\ln\Gamma(x)$ est continue sur $]0,1]$ et pour $x > 0$, on a

$$\ln\Gamma(x+1) = \ln x + \ln\Gamma(x)$$

d'où l'on déduit que $\ln\Gamma(x)$ est intégrable en 0^+ puisqu'il en est ainsi de $\ln x$. Posons

$$I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$$

et effectuons dans cette intégrale le changement de variables $y = 1 - x$. Il vient

$$I = \int_0^1 \ln\Gamma(1-y)\,dy$$

Ainsi

$$2I = \int_0^1 (\ln\pi - \ln(\sin(\pi x)))\,dx$$

Posons

$$J = \int_0^1 \ln(\sin(\pi x))\,dx$$

Il est clair que

$$J = \int_0^{1/2} \ln(\sin(\pi x))\,dx + \int_{1/2}^1 \ln(\sin(\pi x))\,dx$$

et le changement de variables $x = y + \frac{1}{2}$ dans le second terme conduit à

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{1/2} \ln(\sin(\pi x))\,dx + \int_0^{1/2} \ln(\cos(\pi x))\,dx \\ &= \int_0^{1/2} \ln(\frac{\sin(2\pi x)}{2})dx \end{aligned}$$

Si dans cette dernière intégrale, on effectue le changement de variables $y = 2x$, on voit que

$$J = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}\ln 2$$

On en tire que $J = -\ln 2$ et enfin que $I = (\ln \pi + \ln 2)/2 = \ln(\sqrt{2\pi})$.

b) La fonction $e^{-px}/\mathrm{ch}x$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $p \in]-1,1[$. Effectuons le changement de variables $y = e^x$, il vient

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-px}}{\mathrm{ch}x}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{y^{-p}}{1+y^2}\,dy$$

Si nous effectuons à présent le changement de variables $t = 1/(1+y^2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-t)^{-\frac{p+1}{2}} t^{\frac{p+1}{2}-1}\,dt \\ &= \mathrm{B}(1-\frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2}) \\ &= \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi p}{2})} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. □

Exercice 3.10 Démontrer que

$$\text{a)}\ \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{b)}\ \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx \int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^n}\,dx = \frac{\pi}{n^2\sin(\frac{\pi}{n})}\quad (n>1)$$

$$\text{c)}\ \cos(\frac{\pi}{\alpha})\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^\alpha}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^\alpha}}\quad (\alpha>2)$$

$$\text{d)}\ (\int_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx)^2 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

(*Suggestion:*

a) Effectuer le changement de variables $y = x^4$ et les propriétés de la fonction Beta.

b) Effectuer le changement de variables $y = x^n$ et se ramener à la définition de la fonction Gamma. Conclure par la formule d'Euler.

c) Dans la première intégrale, effectuer le changement de variables $y = 1/(1+x^\alpha)$ et dans la seconde poser $x = y^{1/\alpha}$. Conclure grâce à la formule d'Euler.

d) Dans le premier membre, poser $x = y^{1/4}$ et dans le second effectuer le changement de variables $t = \sin(x)$ après avoir réduit l'intégration à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Conclure grâce à la formule d'Euler.)

Exercice 3.11 Montrer que la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r) = \text{mes}(\{x : |x| < r\}) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

En déduire que $\omega_n(r) \to 0$ si $n \to +\infty$.

Solution: Il est clair que le changement de variables $x = ry$ donne

$$\omega_n(r) = \int_{|x|\leq r} dx = r^n \int_{|y|\leq 1} dy$$

Tout revient donc à déterminer $\omega_n = \omega_n(1)$. Par le théorème de Fubini, on obtient pour $n > 1$

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \int_{-1}^{1} dx_n \int_{|(x_1,\ldots,x_{n-1})|\leq\sqrt{1-x_n^2}} dx_1 \ldots dx_{n-1} \\
&= \int_{-1}^{1} \omega_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2})\, dx_n \\
&= 2\omega_{n-1} \int_0^1 (1-x_n^2)^{(n-1)/2}\, dx_n
\end{aligned}$$

Le changement de variables $t = x_n^2$ donne alors

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \omega_{n-1} \int_0^1 (1-t)^{(n-1)/2} t^{-1/2}\, dt \\
&= \omega_{n-1} \mathrm{B}(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\pi^{-n/2} \omega_n \Gamma(\frac{n}{2}+1) = \pi^{-(n-1)/2} \omega_{n-1} \Gamma(\frac{n-1}{2}+1)$$

d'où la conclusion puisque $\omega_1 = 2$. $\square$

Exercice 3.12 Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\, dx = \sqrt{\alpha\pi}$$

Solution: Une intégration par parties conduit à

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx = (1-e^{-\alpha x^2})\frac{-1}{x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} 2\alpha x \frac{1}{x}\,dx$$

d'où la conclusion par Poisson. □

Exercice 3.13 Etablir que pour $a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2}\,dx = \frac{\ln a}{a}$$

Solution: Posons

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+a)^2}\,dx$$

pour tout $\alpha \in]-1,1[$. On vérifie aisément que cette intégrale à un sens. De plus, si $\alpha \in [m,M] \subset]-1,1[$,

$$\begin{array}{rcl} D_\alpha^p\left[\dfrac{x^\alpha}{(x+a)^2}\right] & = & \dfrac{(\ln x)^p x^\alpha}{(x+a)^2} \\ & \le & \dfrac{(\ln x)^p x^m}{a^2}\chi_{[0,1]} + \dfrac{(\ln x)^p x^M}{(x+a)^2}\chi_{[1,+\infty[} \end{array}$$

et comme la fonction majorante est clairement intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de dérivation des intégrales paramétriques permet de montrer que

$$D_\alpha^p I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^p x^\alpha}{(x+a)^2}\,dx$$

pour $\alpha \in]-1,1[$. Ainsi, l'intégrale proposée vaut $D_\alpha I_{|\alpha=0}$.

Effectuons dans $I(\alpha)$ le changement de variables $y = a/(x+a)$, il vient

$$\begin{array}{rcl} I(\alpha) & = & a^{\alpha-1}\displaystyle\int_0^1 (1-y)^\alpha y^{-\alpha}\,dy \\ & = & a^{\alpha-1}\mathrm{B}(\alpha+1, 1-\alpha) \\ & = & a^{\alpha-1}\dfrac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)} \end{array}$$

Ainsi,

$$D_\alpha I = \ln a a^{\alpha-1}\frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)} + a^{\alpha-1}\frac{\pi\sin(\pi\alpha) - \pi\alpha\pi\cos(\pi\alpha)}{\sin^2(\pi\alpha)}$$

et une application directe du théorème de l'Hospital montre que

$$\lim_{\alpha \to 0} D_\alpha I = \frac{\ln a}{a}$$

ce qui donne le résultat cherché. $\square$

Exercice 3.14 Montrer que si $a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-a(t+t^{-1})}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2a}$$

Solution: Posons

$$J(a) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-a(t+t^{-1})}\, dt$$

Il est clair que

$$J(a) = \int_0^1 u^{-1/2} e^{-a(u+u^{-1})}\, du + \int_1^{+\infty} t^{-1/2} e^{-a(t+t^{-1})}\, dt$$

Dans le premier terme, effectuons le changement de variables $t = 1/u$, il vient

$$J(a) = \int_1^{+\infty} (t^{-3/2} + t^{-1/2}) e^{-a(t+t^{-1})}\, dt$$

Posons à présent, $v = \sqrt{a}(t^{1/2} - t^{-1/2})$. On a bien sûr,

$$\begin{aligned} D_t v &= \frac{1}{2}\sqrt{a}(t^{-1/2} + t^{-3/2}) \\ v^2 &= a(t + t^{-1} - 2) \end{aligned}$$

Donc, par substitution, il vient

$$J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{a}} e^{-v^2-2a}\, dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2a}$$

la dernière égalité provenant de l'intégrale de Poisson. $\square$

Exercice 3.15 Démontrer que Γ est la seule fonction Γ_1 sur $]0, +\infty[$ telle que

a) $\ln \Gamma_1$ est convexe

b) $\Gamma_1(x+1) = x\Gamma_1(x)$

c) $\Gamma_1(1) = 1$

Solution: Il est clair que Γ vérifie les conditions (b) et (c) et on obtient aisément (a) en utilisant la définition de Gauss de Γ. Supposons donc que Γ_1 vérifie les conditions (a), (b), (c) et montrons que $\Gamma_1 = \Gamma$. Comme $\ln\Gamma_1$ est convexe, on a

$$\begin{array}{lcl} \ln\Gamma_1((1-t)a+tb) & \leq & (1-t)\ln\Gamma_1(a) + t\ln\Gamma_1(b) \;\; t \in [0,1] \\ \ln\Gamma_1((1-t)a+tb) & \geq & (1-t)\ln\Gamma_1(a) + t\ln\Gamma_1(b) \;\; t \in [1,+\infty[\end{array}$$

Soit $x \in]0,1]$. Prenons $a = m, b = m+1$ et $t = x$ dans la première majoration. Cela donne

$$\ln\Gamma_1(x+m) \leq (1-x)\ln\Gamma_1(m) + x\ln\Gamma_1(m+1)$$

donc

$$\ln\Gamma_1(x+m) - \ln\Gamma_1(m) - x\ln\ m \leq 0.$$

Prenons maintenant $a = m-1$, $b = m$ et $t = x+1$ dans la seconde majoration, il vient

$$\ln\Gamma_1(x+m) \geq (-x)\ln\Gamma_1(m-1) + (x+1)\ln\Gamma_1(m)$$

$$\ln\Gamma_1(x+m) - \ln\Gamma_1(m) \geq x\ \ln(m-1)$$

$$\ln\Gamma_1(x+m) - \ln\Gamma_1(m) - x\ \ln m \geq x\ \ln\frac{m-1}{m}.$$

On en déduit que

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\Gamma_1(m)\ m^x}{\Gamma_1(x+m)} = 1$$

or

$$\Gamma_1(x+m) = (x+m-1)\dots x.\Gamma_1(x).$$

Donc

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\Gamma_1(m)\ m^x}{(x+m-1)\dots x} = \Gamma_1(x).$$

Et la conclusion résulte de l'égalité $\Gamma_1(m) = \Gamma(m)$, de la formule de Gauss pour Γ et de ce que Γ est déterminée sur $]0,+\infty[$ par ses valeurs sur $]0,1]$ grâce à la formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. □

Exercice 3.16 [*Développement de Taylor de* $\ln\Gamma(x)$ *au point 1*]
Etablir que

$$\ln\Gamma(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k S_k\ \frac{x^k}{k} \quad \text{si } x \in]-1,1[$$

où
$$S_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k}$$
si $k \geq 2$ et
$$S_1 = \lim_{m\to+\infty} (\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln m).$$
Signalons que S_1 n'est autre que la "Constante d'Euler" $\gamma \sim 0.57721\ldots$.

(*Suggestion:* Utiliser la définition de Gauss de $\Gamma(x)$.)

Solution: On sait que
$$\Gamma(x+1) = \lim_{m\to+\infty} \frac{(m+1)!(m+1)^x}{(x+1)\ldots(x+m+1)}.$$
Ainsi, si $x \in]-1,+\infty[$,
$$\begin{aligned} \ln\Gamma(x+1) &= \lim_{m\to+\infty} \left[x\ln(m+1) - \sum_{k=1}^{m+1} \ln(1+\tfrac{x}{k})\right] \\ \ln\Gamma(x+1) &= \lim_{m\to+\infty} \left[x\ln m - \sum_{k=1}^{m} \ln(1+\tfrac{x}{k})\right]. \end{aligned}$$
Posons $f_m(x) = x\ln m - \sum_{k=1}^{m} \ln(1+\frac{x}{k})$. On a
$$Df_m(x) = \ln m - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{x}{k}}\ \frac{1}{k} = \ln m - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{x+k}$$
$$D^l f_m(x) = (-1)^l (l-1)! \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(x+k)^l} \quad \text{si } l \geq 2.$$
Or, si $k \geq 2$,
$$\frac{1}{(x+k)^l} \leq \frac{1}{(k-1)^l}$$
ainsi $D^l f_m \underset{]-1,+\infty[}{\rightrightarrows}$ si $l \geq 2$. Si $l = 1$,
$$Df_m(0) = \ln m - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = -1 + \sum_{k=2}^{m} (\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}).$$
Or
$$\frac{1}{k} + \ln(1-\frac{1}{k}) \leq \frac{C}{k^2};$$

il résulte du critère de Riemann que $Df_m(0)$converge vers une limite que nous noterons $-S_1$. Le théorème de dérivation des limites de fonctions montre donc que $\forall l \geq 2$

$$D^l f_m \underset{]-1,+\infty[}{\Rightarrow} D^l \ln \Gamma(x+1).$$

En particulier, $D^l \ln \Gamma(x+1)|_{x=0} = (-1)^l (l-1)! S_l$ si $l \geq 1$ d'où la conclusion car S_l est décroissant et minoré par 1.

Les graphiques suivants représentent successivement

$\ln \Gamma(x+1)$

$\ln \Gamma(x+1)$ et $-\gamma x + (\pi^2/12)x^2$

$\ln \Gamma(x+1)$ et $-\gamma x + (\pi^2/12)x^2 - (1.20206/3)x^3 + (\pi^4/360)x^4$

$\square$

Exercice 3.17 Déduire de la formule de développement de $\ln \Gamma(1+x)$ que

$$S_{2k} = \frac{k\pi^{2k}}{(2k)!} D^{2k} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)|_{x=0}.$$

Montrer que pour $k = 1, 2$ on obtient $S_2 = \pi^2/6$ et $S_4 = \pi^4/90$.

(*Suggestion:* Utiliser la formule des compléments pour la fonction Bêta.)

Solution: On a

$$\ln \Gamma(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k S_k \frac{x^k}{k}$$

si $x \in]-1,1[$. De même, si $x \in]-1,1[$

$$\ln\Gamma(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty} S_k\,\frac{x^k}{k}.$$

Ainsi pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\ln\Gamma(1+x)+\ln\Gamma(1-x)=2\sum_{k=1}^{\infty} S_{2k}\,\frac{x^{2k}}{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k}}{k}x^{2k}.$$

Mais

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)=x\,B(x,1-x)=\frac{\pi x}{\sin\pi x},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k}}{k}x^{2k}=-\ln(\frac{\sin\pi x}{\pi x});$$

on a donc

$$\frac{S_{2k}}{k}=-\frac{1}{(2k)!}\left[D^{2k}\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right]_{x=0}$$

$$S_{2k}=-\frac{k\pi^{2k}}{(2k)!}\left[D^{2k}\ln\frac{\sin u}{u}\right]_{u=0}.$$

Calculons S_2 et S_4. On a

$$\sin u=u-\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{5!}u^5+0(u^7)$$

et

$$-\ln(1-u)=u+\frac{u^2}{2}+0(u^3).$$

Ainsi

$$1-\frac{\sin u}{u}=\frac{u^2}{6}-\frac{u^4}{120}+0(u^6)$$

$$\begin{aligned}-\ln\left(1-\left(1-\frac{\sin u}{u}\right)\right) &= \frac{u^2}{6}-\frac{u^4}{120}+\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{6}-\frac{u^4}{120}\right)^2+0(u^6)\\ &= \frac{u^2}{6}-\frac{u^4}{120}+\frac{u^4}{2\cdot 36}+0(u^6)\\ -\ln\left(\frac{\sin u}{u}\right) &= \frac{u^2}{6}+\frac{u^4}{180}+0(u^6)\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } S_4 = \frac{2\pi^4}{180} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

Exercice 3.18 Déduire de la formule de développement de $\ln\Gamma(1+x)$ que pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(1+x) &= \frac{1}{2}\ln(\frac{\pi x}{\sin \pi x}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) + (1-\gamma)x \\ &\quad -(S_3-1)\frac{x^3}{3} - (S_5-1)\frac{x^5}{5} - \cdots\end{aligned}$$

Signalons que cette formule converge rapidement et qu'elle a été utilisée par Legendre pour le calcul des tables de la fonction Γ.

Solution: Dans l'exercice précédent, on a vu que

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{2k} x^{2k}.$$

De plus, on sait que

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

donc

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

et

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

On en déduit que

$$\ln\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{\pi x}{\sin \pi x}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{2k+1}}{2k+1} x^{2k+1}$$

et enfin

$$\ln\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{\pi x}{\sin\pi x}) - \frac{1}{2}\ln\,(\frac{1+x}{1-x}) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_{2k+1}-1}{2k+1}x^{2k+1}.$$

D'où la conclusion.

Les graphiques suivants représentent successivement

$$\begin{array}{lll}
\ln\Gamma(x+1) & \text{et} & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
\ln\Gamma(x+1) & \text{et} & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + (1-\gamma)x \\
\ln\Gamma(x+1) & \text{et} & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + (1-\gamma)x - \frac{0.20206}{3}x^3
\end{array}$$

$\square$

nvier 1990¿ Distribution pour la 2CSP

Chapitre 4

Espaces L^1, L^2 et L^∞

Exercice 4.1

a) Etablir que $\sin(mx) \in \mathrm{L}^{1,2,\infty}([0,2\pi])$, mais que ses normes dans ces différents espaces sont distinctes.

b) Montrer que $\| \chi_{\mathbb{Q}} \|_{\mathrm{L}^\infty} = 0$.

Solution: a) Comme $\sin(mx)$ est continu sur $[0,2\pi]$, il est évidemment de classe $\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^2$ et L^∞. De plus,

$$\|\sin(mx)\|_{\mathrm{L}^\infty([0,2\pi])} = \sup_{x\in[0,2\pi]} (|\sin(mx)|) = 1.$$

Dans le cas L^1, on a

$$\|\sin(mx)\|_{\mathrm{L}^1([0,2\pi])} = \int_0^{2\pi} |\sin(mx)|\, dx.$$

Comme la fonction $|\sin(mx)|$ est périodique de période $\frac{\pi}{m}$, on a

$$\begin{aligned}\|\sin(mx)\|_{\mathrm{L}^1([0,2\pi])} &= 2\int_0^{\pi} \sin(y)dy \\ &= 4.\end{aligned}$$

Enfin, dans le cas L^2, on a

$$\|\sin(mx)\|^2_{\mathrm{L}^2([0,2\pi])} = \int_0^{2\pi} \sin^2(mx)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2mx)}{2}\, dx \\ &= \pi. \end{aligned}$$

b) La fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ ne diffère de zéro qu'aux points de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$ qui est donc négligeable. Ainsi

$$\|\chi_{\mathbb{Q}}\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|0\|_{\mathrm{L}^\infty} = 0.$$

□

Exercice 4.2 Montrer que dans l'espace $\mathrm{L}^2(E)$, on a les égalités suivantes :

a) $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \dfrac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{2}$

b) $\langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle = \dfrac{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2}{2}$

c) $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|f + i^k g\right\|^2$

(*Suggestion:* Développer $\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle$ et $\|f-g\|^2 = \langle f-g, f-g\rangle$ par linéarité du produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(E)$.)

Exercice 4.3 Montrer que tout élément de $\mathrm{L}^1(E)$ est le produit de deux éléments de $\mathrm{L}^2(E)$.

(*Suggestion:* Remarquer que $f = (\sqrt{|f|}\, e^{i \arg(f)/2})^2$.)

Exercice 4.4 Si $f \in \mathrm{C}^1(]0, +\infty[)$ et si $f, Df \in \mathrm{L}^2(]0, +\infty[)$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution: Soit $a > 0$, il est clair que pour tout $x > a$,

$$f^2(x) = f^2(a) + \int_a^x D_t f^2(t) dt.$$

Or $D_t f^2(t) = 2f(t)D_t f(t)$ et cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ étant donné les hypothèses. Il en résulte que $f^2(x)$ admet une limite l en $+\infty$. Comme $f^2(x)$ est intégrable, cette limite est nulle, d'où la conclusion. □

Exercice 4.5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f \in C_1(]a,b[) \cap C_0([a,b])$ et si $Df \in L^2(]a,b[)$, démontrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b-a)\|Df\|^2_{L^2(]a,b[)}.$$

Solution: On a $f(b) - f(a) = \int_a^b dx\ D_x f(x)$ donc

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b-a)\ \|Df\|^2_{L^2([a,b])}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Exercice 4.6 [*Levi dans* L^2] Montrer que si f_m est une suite croissante de fonctions positives de L^2 et s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f_m\|_2 \leq C$ alors il existe une fonction f de L^2 telle que f_m converge vers f presque partout et dans L^2.

Solution: L'application du théorème de Levi dans L^1 à la suite f_m^2 fournit une fonction positive $g \in L^1$ telle que $f_m^2 \underset{pp}{\to} g$. Si l'on pose $f = \sqrt{g}$, il est clair que $f \in L^2$ et que $f_m \uparrow f$ presque partout. La suite $|f_m - f|^2 = (f - f_m)^2$ décroît donc vers zéro presque partout et une seconde application du théorème de Levi dans L^1 montre que $\int |f_m - f|^2\, dx \to 0$. Ainsi $\|f_m - f\|_2 \to 0$ et $f_m \to f$ dans L^2. □

Exercice 4.7 [*Lebesgue dans* L^2] Montrer que si f_m est une suite de fonctions de L^2 qui converge *pp* vers$f$ et s'il existe une fonction $F \in L^2$ telle que $|f_m| \leq F$ pour tout naturel m alors la limite $f \in L^2$ et $f_m \to f$ au sein de l'espace L^2.

(*Suggestion:* Procéder comme pour le théorème de Levi dans L^2 mais en partant du théorème de Lebesgue dans L^1.)

Exercice 4.8 Montrer que si $f_1, \ldots, f_J$ sont des éléments de $L^2(E)$, alors la matrice $H = (\langle f_i, f_j \rangle)$ est hermitienne semi-définie positive. Elle est hermitienne définie positive si et seulement si les $f_1, \ldots, f_J$ sont linéairement indépendants.

Solution: Pour tout vecteur $X = (x_1, \ldots, x_J) \in \mathbb{C}^J$, on a

$$\langle HX, X \rangle = \sum_{i=1}^{J} \sum_{j=1}^{J} x_j H_{ij} \overline{x}_i$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J} x_j \langle f_i, f_j\rangle \overline{x}_i \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{J} \overline{x}_i f_i, \sum_{j=1}^{J} \overline{x}_j f_j \right\rangle \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{J} \overline{x}_i f_i \right\|^2 . \end{aligned}$$

De cette dernière égalité, il découle que H est hermitien semi-défini positif. De plus, il est clair qu'un vecteur $X \in \mathbb{C}^J$ est tel que $\langle HX, X\rangle = 0$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{J} \overline{x}_i f_i = 0.$$

Ainsi, H est h.d.p. si et seulement si les $f_1, \dots, f_J$ sont linéairement indépendants. □

Exercice 4.9 Si $f \in \mathrm{L}^2(]0, r[)$ pour un $r > 0$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

Si $f \in \mathrm{L}^2(]0, +\infty[)$, on a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

Solution: Remarquons d'abord que les intégrales ont un sens car le produit de deux éléments de L^2 est intégrable.

Cas 0^+ — pour tout $r > x > 0$, l'inégalité de Schwarz procure la relation

$$\left| \int_0^x f(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_0^x |f|^2 \, dt}.\sqrt{x}$$

d'où la conclusion.

Cas $+\infty$ — en appliquant la relation $|a+b|^2 \leq 2\,|a|^2 + 2\,|b|^2 \quad (a, b \in \mathbb{C})$, on obtient (pour tous $x > 0$ et $N > 0$)

$$\left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 = \left| \int_0^N f(t)dt + \int_N^x f(t)dt \right|^2 \leq 2 \left| \int_0^N f(t)dt \right|^2 + 2 \left| \int_N^x f(t)dt \right|^2 .$$

Vu l'inégalité de Schwarz (procéder comme en (a)), on obtient

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|^2 \leq 2N\int_0^{+\infty}|f|^2\,dt + 2x\int_N^{+\infty}|f|^2\,dt,$$

donc aussi

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)dt\right|^2 \leq \frac{2N}{x}\|f\|^2 + 2\int_N^{+\infty}|f|^2\,dt.$$

Fixons à présent $\epsilon > 0$. Il existe $N = N(\epsilon) > 0$ tel que $\int_N^{+\infty}|f|^2\,dt \leq \epsilon/4$. Dès lors, pour tout $x \geq (4N/\epsilon)\|f\|^2$, on a

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)dt\right|^2 \leq \epsilon.$$

On peut alors conclure. □

Exercice 4.10 [*Théorème de F. Riesz*] Si $\mathcal{T} : \mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$, alors il existe un et un seul $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que $\mathcal{T}(f) = \langle f, g\rangle$ pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Solution: Le cas $\mathcal{T} = 0$ étant évident, supposons que $\mathcal{T} \neq 0$.

Posons $H = \ker\mathcal{T} = \{x : \mathcal{T}(x) = 0\}$ et soit $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)\backslash H$. Posons

$$\delta = \inf_{h\in H}(d(f,h)).$$

Soit h_m une suite de H telle que

$$d(h_m, f) \to \delta.$$

On sait que

$$\|h_m - f\|^2 + \|h_n - f\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|h_m + h_n - 2f\|^2 + \|h_m - h_n\|^2\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|h_m - h_n\|^2 &= 2\|h_m - f\|^2 + 2\|h_n - f\|^2 - 4\left\|\frac{h_m + h_n}{2} - f\right\|^2 \\ &\leq 2\|h_m - f\|^2 + 2\|h_n - f\|^2 - 4\delta^2. \end{aligned}$$

Donc h_m est de Cauchy et converge vers $h_0 \in H$ tel que $d(h_0, f) = \delta$. Comme $\forall t \in \mathbb{R} \quad d(h_0 + th, f) \geq d(h_0, f)$, si $h \in H$, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall h \in H \quad t^2\|h\|^2 + 2t\Re\langle h, f - h_0\rangle \geq 0.$$

Il en résulte que $\forall h \in H \quad \Re\langle h, f-h_0\rangle = 0$ et par conséquent que $\langle h, f-h_0\rangle = 0$. Posons $g = f - h_0$, il est clair que $\langle h, g\rangle = 0 \ \ \forall h \in H$; il existe donc une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $\langle h, g\rangle = c\mathcal{T}(h)$. On en déduit que $\mathcal{T}(h) = \langle h, g/\overline{c}\rangle$, d'où la conclusion. □

Exercice 4.11 Si F est une fonction mesurable sur E telle que fF appartienne à $\mathrm{L}^p(E)$ $(p = 1, 2, \infty)$ pour tout f appartenant à $\mathrm{L}^q(E)$ $(q = 1, 2, \infty)$ avec $\|fF\|_p \leq C\|f\|_q$, alors la fonction F est un élément de $\mathrm{L}^r(E)$ et vérifie $\|F\|_r \leq C$ pour les valeurs de p, q, r indiquées ci-dessous

	f		
fF	$\mathrm{L}^1(E)$	$\mathrm{L}^2(E)$	$\mathrm{L}^\infty(E)$
$\mathrm{L}^1(E)$	$\infty(a)$	$2(b)$	$1(d)$
$\mathrm{L}^2(E)$		$\infty(c)$	$2(d)$
$\mathrm{L}^\infty(E)$			$\infty(d)$

Solution:

a — f et $fF \in \mathrm{L}^1(E)$.

On sait que $E = \cup_{m=1}^{+\infty} E_m$, avec E_m intégrable pour tout m. Procédons alors par l'absurde et supposons que F ne soit pas borné *pp* par C. Alors il existe M tel que $F\chi_{E_M}$ ne soit pas borné *pp* par C. Il existe ensuite $\epsilon > 0$ tel que $|F|\chi_{E_M} \geq C+\epsilon$ dans un ensemble non négligeable inclus dans E_M (pour s'en convaincre, il suffit de procéder par l'absurde en se rappelant que toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable). Posons $f = \chi_{E_M}$; on obtient

$$\|fF\|_1 \geq (C+\epsilon)\,\mathrm{mes}(E_M).$$

Or on doit aussi avoir

$$\|fF\|_1 \leq C\|f\|_1 = C\ \mathrm{mes}(E_M),$$

d'où une contradiction puisque $\mathrm{mes}(E_M) \neq 0$.

b — Posons $F_m = F\chi_{\{x:|F(x)|<m, |x|<m\}}$. Il est clair que $F_m \in \mathrm{L}^2$. Ainsi $FF_m \in \mathrm{L}^1$ et

$$\int |FF_m|\,dx \leq C\sqrt{\int |F|^2\,\chi_{\{x:|F(x)|<m,|x|<m\}}dx}.$$

Mais $|FF_m| = |F|^2 \chi_{\{x:F(x)<m,|x|<m\}}$ donc

$$\int |F|^2 \chi_{\{x:|F(x)|<m,|x|<m\}} dx \leq C^2.$$

La conclusion résulte alors du théorème de Levi.

c — Pour tout $f \in L^1(E)$, il est clair que $\sqrt{|f|} \in L^2(E)$. Ainsi $\sqrt{|f|}F \in L^2(E)$ et $\left\|\sqrt{|f|}F\right\|_2 \leq C \left\|\sqrt{|f|}\right\|_2$. Il en résulte que $fF^2 \in L^1(E)$ et que $\left\|fF^2\right\|_1 \leq C^2 \|f\|_1$. Tenant compte de a), on en déduit que $F^2 \in L^\infty(E)$ et que $\left\|F^2\right\|_\infty \leq C^2$ d'où la conclusion.

d — Comme $\chi_E \in L^\infty(E)$, il est clair que $F = F\chi_E \in L^{1,2,\infty}(E)$ et que

$$\|F\|_{1,2,\infty} = \|F\chi_E\|_{1,2,\infty} \leq C \|\chi_E\|_\infty$$

d'où la conclusion. □

Exercice 4.12 Si $f(x,y)$ est mesurable et de classe L^2 en x pour presque tout y et si $\|f(\cdot,y)\|_{L^2}$ est L^1 en y alors

a) $f(x,y)$ est L^1 en y pour presque tout x ;

b) $\int f(x,y)dy$ est L^2 en x ;

c) $\|\int f(\cdot,y)dy\|_{L^2} \leq \int \|f(\cdot,y)\|_{L^2} dy$.

Solution: Comme $f(x,y)$ et $f(x,z)$ sont L^2 en x pour presque tout y et presque tout z, on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \left|\int f(x,y)\overline{f}(x,z)dx\right| &\leq \|f(\cdot,y)\|_{L^2} \|f(\cdot,z)\|_{L^2} \\ \int |f(x,y)| \cdot |f(x,z)|\, dx &\leq \|f(\cdot,y)\|_{L^2} \|f(\cdot,z)\|_{L^2} \end{aligned}$$

Par le théorème de Tonelli, on en déduit que la fonction$f(x,y)$ $f(x,z)$ est intégrable en (x,y,z). Il en résulte que $f(x,y)$ est intégrable en y pour presque tout x (Fubini). De plus,

$$\left|\int dy \int dz \int dx f(x,y).\overline{f}(x,z)\right| \leq \int \|f(\cdot,y)\|_{L^2} dy \int \|f(\cdot,z)\|_{L^2} dz$$

et par Fubini, on obtient

$$\left|\int dx \int f(x,y)dy \overline{\left(\int f(x,z)dz\right)}\right| \leq (\int \|f(\cdot,y)\|_{L^2} dy)^2.$$

Cela montre que $\int f(x,y)dy$ est L^2 en x et que

$$\left\| \int f(\cdot,y)dy \right\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq (\int \|f(\cdot,y)\|_{\mathrm{L}^2}\, dy)^2,$$

d'où la conclusion. $\square$

Exercice 4.13 Si $K(x)$ est défini et positif sur $[0,+\infty[$ et si

$$\int_0^{+\infty} \frac{K(x)}{\sqrt{x}} dx = C$$

alors

a) $\int_0^{+\infty} K(xy)f(x)dx \in \mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ si $f \in \mathrm{L}^2([0,+\infty[)$;

b) $\left\|\int_0^{+\infty} K(xy)f(x)dx\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq C\,\|f\|_{\mathrm{L}^2}$.

Solution: Soit g une fonction de $\mathrm{L}^2([0,+\infty[)$. Montrons que $K(xy)f(x)g(y)$ est intégrable sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Pour cela, considérons le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & x \\ v & = & xy \end{array} \right. \quad \text{de jacobienne } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u \end{pmatrix}.$$

Nous devrons donc étudier l'intégrabilité de

$$K(v)f(u)\ \frac{g(\frac{v}{u})}{u}$$

sur $]0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[$. Remarquons que

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{g(\frac{v}{u})}{u}\right|^2 du = \frac{1}{v}\,\|g\|_{\mathrm{L}^2}^2$$

Ainsi, $g(\frac{v}{u})/u$ est de classe L^2 pour presque tout $v \in [0,+\infty[$. Or $f \in \mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ donc il est clair que $K(v)\frac{g(\frac{v}{u})}{u}f(u)$ est L^1 en u pour presque tout v dans $[0,+\infty[$. De plus,

$$\int_0^{+\infty} K(v)\left|\frac{g(\frac{v}{u})}{u}\right| |f(u)|\, du \leq K(v)\frac{1}{\sqrt{v}}\,\|g\|_{\mathrm{L}^2}\,\|f\|_{\mathrm{L}^2}.$$

L'hypothèse combinée au théorème de Tonelli montre alors que $K(v)\frac{g(\frac{v}{u})}{u}f(u)$ est intégrable sur $[0,+\infty[\ \times\ [0,+\infty[$. De plus, on a montré que

$$\left|\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dx\ K(xy)f(x)g(y)\right| \leq C\,\|g\|_{\mathrm{L}^2}\,\|f\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Le théorème de Fubini permet d'affirmer que

$$K(xy)f(x)g(y)$$

est intégrable en x sur $[0,+\infty[$ pour presque tout $y \in [0,+\infty[$ si $g \in L^2([0,+\infty[)$; il en est donc de même de

$$K(xy)f(x).$$

De plus,

$$\left(\int_0^{+\infty} K(xy)f(x)dx\right) g(y) \in L^1([0,+\infty[)$$

si $g \in L^2([0,+\infty[)$ et

$$\int_0^{+\infty} \left| \left(\int_0^{+\infty} K(xy)f(x)dx\right) g(y) \right| dy \leq C \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Il résulte alors de l'exercice (4.11) que

$$\int_0^{+\infty} K(xy)f(x)dx \in L^2([0,+\infty[)$$

et que

$$\left\| \int_0^{+\infty} K(xy)f(x)dx \right\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

□

Exercice 4.14 [*Espace de Hölder*] Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Pour tout réel $p \geq 1$, on définit l'espace de Hölder d'indice p par la formule

$$L^p(E) = \{f : f \text{ mesurable sur } E, |f|^p \in L^1(E)\}$$

et pour tout $f \in L^p(E)$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

On demande de montrer que

a) L'espace $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ est normé.

b) La fonction $f\overline{g} \in L^1(E)$ si $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$ et si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De plus, on a l'inégalité de Hölder

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

c) S'il existe un réel $p_0 \geq 1$ tel que $f \in \mathrm{L}^{p_0}(E) \cap \mathrm{L}^\infty(E)$, alors $f \in \mathrm{L}^p(E)$ pour tout $p \geq p_0$ et

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p .$$

d) Réciproquement, si $f \in \cap_{p > p_0} \mathrm{L}^p(E)$ et s'il existe un réel l tel que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = l$$

alors $f \in \mathrm{L}^\infty(E)$ et

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p .$$

Solution: Il est clair que $cf \in \mathrm{L}^p(E)$ si $c \in \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{L}^p(E)$. Soient f, g des éléments de $\mathrm{L}^p(E)$. Comme

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$$

si $a, b \geq 0$, on voit que

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

et la majorante étant intégrable, on peut conclure que $f + g \in \mathrm{L}^p(E)$.

Supposons à présent que $f \in \mathrm{L}^p(E)$, que $g \in \mathrm{L}^q(E)$ et que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Comme le logarithme est une fonction concave, on dispose de la majoration

$$\ln(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b) \geq \frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b$$

si $a, b > 0$. On en déduit que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

si $a, b \geq 0$. En appliquant cette relation à $|f|$ et $|g|$, on voit que $|f\overline{g}| \in \mathrm{L}^1(E)$ et que

$$\int_E |f\overline{g}|\, dx \leq \frac{1}{p}\int_E |f|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_E |g|^q\, dx.$$

Ainsi, si $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, on trouve que

$$|\langle f, g\rangle| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1.$$

Dans le cas général, si $f \neq 0$ et si $g \neq 0$, on a

$$\left|\left\langle \frac{f}{\|f\|_p}, \frac{g}{\|g\|_q} \right\rangle\right| \leq 1$$

ce qui entraîne l'inégalité de Hölder

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

et cette inégalité se maintient si $f = 0$ ou si $g = 0$.

Pour établir l'inégalité de Minkowsky, il suffit maintenant de supposer que f et g sont dans $\mathrm{L}^p(E)$ et d'écrire

$$\int_E |f+g|^p \, dx \leq \int_E |f| \, |f+g|^{p-1} \, dx + \int_E |g| \, |f+g|^{p-1} \, dx$$

puis d'utiliser l'inégalité de Hölder pour affirmer que

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p \quad \leq \quad & \|f\|_p \left(\int |f+g|^p \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} + \\ & \|g\|_p \left(\int |f+g|^p \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

De cette relation, on tire aisément que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Passons maintenant au point c). Par hypothèse, $\|f\|_\infty$ est fini et on a $|f| \leq \|f\|_\infty$ presque partout. Ainsi, si $p \geq p_0$

$$|f|^p = |f|^{p-p_0} \, |f|^{p_0} \leq \|f\|_\infty^{p-p_0} \, |f|^{p_0} .$$

De cette relation, on tire que $f \in \mathrm{L}^p(E)$ et que

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p_0}{p}} \, \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}} .$$

Si l'on pose

$$E_\epsilon = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \frac{\epsilon}{2}\}$$

on a, pour tout $p > p_0$,

$$\|f\|_p^p \geq \int_{E_\epsilon} |f(x)|^p \, dx \geq \left(\int_{E_\epsilon} |f(x)|^{p_0} \, dx\right)\left(\|f\|_\infty - \frac{\epsilon}{2}\right)^{p-p_0}.$$

Ainsi,

$$\left(\int_{E_\epsilon} |f(x)|^{p_0} \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \frac{\epsilon}{2}\right)^{1-\frac{p_0}{p}} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p_0}{p}} \, \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}} .$$

Dans cette relation, la minorante tend vers $\|f\|_\infty - \epsilon/2$ et la majorante vers $\|f\|_\infty$ si $p \to +\infty$, donc il existe $p_\epsilon > p_0$ tel que

$$\|f\|_\infty - \epsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + \epsilon$$

pour $p > p_\epsilon$. D'où la conclusion.

Enfin, pour d), remarquons que

$$\{x : |f(x)| > 1 + l\} \subset \bigcup_{p_1 > p_0} E_{p_1}$$

où on a posé

$$E_{p_1} = \bigcap_{p > p_1} \{x : |x| \leq p_1, |f(x)| > 1 + \|f\|_p\}.$$

Bien sûr, pour tout $p > p_1$, on a

$$(1 + \|f\|_p)\chi_{E_{p_1}} \leq |f|.$$

Il en résulte que

$$(1 + \|f\|_p)^p \operatorname{mes}(E_{p_1}) \leq \|f\|_p^p.$$

Donc, on a

$$\operatorname{mes}(E_{p_1}) \leq (\frac{\|f\|_p}{1 + \|f\|_p})^p$$

pour tout $p > p_1$. En passant à la limite pour $p \to +\infty$, on voit que $\operatorname{mes}(E_{p_1}) = 0$. Il en résulte aussitôt que

$$\{x : |f(x)| > 1 + l\}$$

est négligeable et que $|f(x)| \leq 1 + l$ presque partout et on conclut par c). □

Exercice 4.15 Montrer que les espaces $L^p(E)$, $(p \geq 1)$ sont de Banach.

(*Suggestion:* Adapter la démonstration donnée au cours pour l'espace $L^2(E)$.)

Exercice 4.16 [*Inégalité de Hölder généralisée*] Etablir que si $f_1 \in L^{k_1}(E), \ldots, f_p \in L^{k_p}(E)$ et si $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_p} = 1$ alors le produit $f_1 \ldots f_p \in L^1(E)$ et

$$\left| \int_E f_1 \ldots f_p dx \right| \leq \|f_1\|_{k_1} \cdots \|f_p\|_{k_p}$$

Solution: Procédons par récurrence sur p, le cas $p = 2$ étant connu. Posons $q = 1/(1 - \frac{1}{k_1})$. Il est clair que $|f_2|^q \in \mathrm{L}^{k_2/q}(E), \ldots, |f_p|^q \in \mathrm{L}^{k_p/q}(E)$ comme $\frac{q}{k_2} + \cdots + \frac{q}{k_p} = 1$, l'hypothèse de récurrence montre que $|f_2|^q \ldots |f_p|^q \in \mathrm{L}^1(E)$ et que

$$\int_E |f_2|^q \ldots |f_p|^q \, dx \leq \|f_2\|_{k_2}^q \ldots \|f_p\|_{k_p}^q .$$

Il en résulte que $f_2 \ldots f_p \in \mathrm{L}^q(E)$ et comme $\frac{1}{q} + \frac{1}{k_1} = 1$, on constate que

$$f_1(f_2 \ldots f_p) \in \mathrm{L}^1(E)$$

et que

$$\int_E |f_1| \, |f_2 \ldots f_p| \, dx \leq \|f_1\|_{k_1} \|f_2 \ldots f_p\|_q .$$

En rassemblant les résultats obtenus, il vient

$$\int_E |f_1 f_2 \ldots f_p| \, dx \leq \|f\|_{k_1} \|f\|_{k_2} \cdots \|f_p\|_{k_p}$$

d'où la conclusion. □

Exercice 4.17 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, tout $p \geq 1$ et tout $f \in \mathrm{L}^p$, il existe une fonction étagée α telle que

$$\|f - \alpha\|_p \leq \epsilon.$$

(*Suggestion:* Adapter l'argument donné au cours pour $p = 1, 2$.)

Exercice 4.18 Déduire de l'exercice précédent que pour tout $p \geq 1$ et tout $f \in \mathrm{L}^p$,

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p \to 0$$

si $h \to 0$.

(*Suggestion:* Adapter l'argument donné au cours pour $p = 1, 2$.)

Chapitre 5

Produit de Convolution

Exercice 5.1 Soient E_1 et E_2 deux parties intégrables de $\mathbb{R}^n$. Alors la fonction

$$(\chi_{E_1} * \widetilde{\chi_{E_2}})(x)$$

a) est définie sur $\mathbb{R}^n$,

b) est intégrable et continue sur $\mathbb{R}^n$,

c) vérifie $(\chi_{E_1} * \widetilde{\chi_{E_2}})(x) = \text{mes}[E_1 \cap (E_2 + x)] = \text{mes}[(E_1 - x) \cap E_2]$,

d) vérifie $\int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{E_1} * \widetilde{\chi_{E_2}})(x)dx = \text{mes}E_1.\text{mes}E_2$.

(*Suggestion:* Utiliser la théorie du produit de composition en remarquant que la fonction caractéristique d'un ensemble intégrable est un élément de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2 \cap \mathrm{L}^\infty$.)

Exercice 5.2 Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0, +\infty[)$. Pour tout $x \geq 0$, posons

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt$$

Alors

a) h est défini et continu sur $[0, +\infty[$,

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x h(x) = 0$.

(*Suggestion:* Comme les fonctions $f\chi_{]0,+\infty[}(x)$ et $e^x\chi_{]-\infty,0[}(x)$ sont des éléments de $L^2(\mathbb{R})$, ces deux fonctions sont convolables et leur produit de convolution est uniformément continu sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini. Calculons ce produit pour $x \geq 0$. On a

$$(f\chi_{]0,+\infty[} * e^x\chi_{]-\infty,0[})(x) = e^x h(x).$$

Par conséquent, vu la continuité de la fonction e^{-x} et vu les propriétés du produit de convolution, on obtient la thèse.)

Exercice 5.3 Soient a et b des réels positifs tels que $0 < a < b$. Si l'on pose

$$f = e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}, \quad g = e^{-bx}\chi_{[0,+\infty[},$$

montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f * g}{x} dx = \frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

Solution: Il est clair que f et g sont convolables et que l'on a

$$(f * g)_x = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}\chi_{[0,+\infty[}(x).$$

Il en résulte que $(f * g)/x$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et en remarquant que

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-yx} dy$$

il vient :

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{e^{-(a+y)x} - e^{-(b+y)x}}{b-a}.$$

Par Fubini, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dx \frac{e^{-(a+y)x} - e^{-(b+y)x}}{b-a},$$

d'où l'on conclut que

$$\begin{aligned} (b-a)I &= \int_0^{+\infty} \left[\tfrac{1}{(a+y)} - \tfrac{1}{(b+y)}\right] dy \\ &= [\ln(a+y) - \ln(b+y)]_0^{+\infty} \\ &= \ln(b/a) \end{aligned}$$

ce qui suffit. □

Exercice 5.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer et représenter graphiquement

$$g(x) = \chi_{[0,1]} * \chi_{[1,2]} * \chi_{[2,3]}(x).$$

Solution: On a

$$g(x) := (\chi_{[0,1]} * \chi_{[1,2]})(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.1}$$

On a ensuite

$$(g * \chi_{[2,3]})(x) = \begin{cases} (x-3)^2/2 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 9x - 39/2 & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ (x-6)^2/2 & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.2}$$

□

Exercice 5.5 a) Soient

$$f(x) = e^x \chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$. Donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.
b) Soit $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y\}$. Montrer que la fonction $\chi_\mathcal{C} * \chi_\mathcal{C}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$. Donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Solution: a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(y)g(x-y) &= e^y \chi_{[1,+\infty[}(y)\ (x-y)\chi_{[-1,+\infty[}(x-y) \\ &= e^y (x-y)\chi_{[1,+\infty[\cap]-\infty,x+1]}(y) \\ &= \begin{cases} e^y(x-y)\chi_{[1,x+1]}(y) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors, la fonction (de y) $f(y)g(x-y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $(f * g)(x) = \int_1^{x+1} e^y(x-y)\, dy = -ex$ si $x \geq 0$, 0 si $x < 0$.

b) On a $(\chi_\mathcal{C} * \chi_\mathcal{C})(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin \mathcal{C}$ et $(\chi_\mathcal{C} * \chi_\mathcal{C})(x,y) = (1/2)(y^2 - x^2)$ sinon.

□

Exercice 5.6 [*Convolution et probabilités*]

Rappelons qu'une variable aléatoire réelle x de densité de probabilité $f(x)$ est une variable dont la valeur est liée à l'issue d'un processus aléatoire et pour laquelle la probabilité de trouver x dans $[a,b]$ est donnée par

$$P(x \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Rappelons également que si deux variables aléatoires x et y de densité respective f et g sont indépendantes, la probabilité de trouver (x,y) dans une partie mesurable A de $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$P((x,y) \in A) = \int_A f(x)g(y)dxdy.$$

On demande de déduire de ces faits que si x et y sont des variables aléatoires indépendantes de densité f et g alors $x+y$ est une variable aléatoire de densité $f * g$.

Solution: Par hypothèse, f et g sont des fonctions intégrables et

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy = 1.$$

De plus, on a évidemment

$$P(x+y \in [a,b]) = P((x,y) \in \{(x,y) : x+y \in [a,b]\}).$$

Par conséquent,

$$P(x+y \in [a,b]) = \int_{\{(x,y):x+y\in[a,b]\}} f(x)g(y)dxdy.$$

Si nous effectuons le changement de variables

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x \end{cases}$$

dans cette intégrale, il vient

$$P(x+y \in [a,b]) = \int_{\{(u,v):u\in[a,b]\}} f(v)g(u-v)dudv,$$

d'où la conclusion par Fubini. □

Exercice 5.7 [*Densité d'une somme de variables gaussiennes*]

La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne d'écart type σ est donnée par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad \sigma > 0.$$

Vérifier que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(x)dx &= 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} xG_\sigma(x)dx &= 0 \quad \text{[Moyenne nulle]} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2G_\sigma(x)dx &= \sigma^2 \quad \text{[Ecart type } \sigma\text{]}
\end{aligned}$$

Etablir ensuite que

$$G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}.$$

En déduire que la somme de deux variables gaussiennes indépendantes, l'une d'écart type σ et l'autre d'écart type τ, est une variable gaussienne d'écart type $\sqrt{\sigma^2+\tau^2}$.

Solution: Rappelons d'abord que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{[Poisson]} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{[Dérivation de Poisson]}
\end{aligned}$$

Il résulte des formules précédentes que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}} = 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2G_\sigma(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2\frac{1}{2\sigma^2}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}} = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Comme xG_σ est intégrable et impaire, son intégrale est nulle. Etablissons à présent la formule de convolution. On a

$$\begin{aligned}(G_\sigma * G_\tau)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2\tau^2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\tau\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{xy}{\sigma^2}-\frac{y^2}{2\sigma^2}-\frac{y^2}{2\tau^2}} dy\end{aligned}$$

Transformons l'exposant de l'intégrand comme suit :

$$\begin{aligned}&-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{xy}{\sigma^2}-\frac{y^2}{2\sigma^2}-\frac{y^2}{2\tau^2} \\ &= \frac{-\tau^2x^2+2\tau^2xy-\tau^2y^2-\sigma^2y^2}{2\sigma^2\tau^2} \\ &= \frac{-(\sqrt{\tau^2+\sigma^2}y-\frac{\tau^2}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}x)^2+\frac{\tau^4}{\tau^2+\sigma^2}x^2-\tau^2x^2}{2\sigma^2\tau^2} \\ &= \frac{-x^2}{2(\tau^2+\sigma^2)} - \frac{(\sqrt{\tau^2+\sigma^2}y-\frac{\tau^2}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}x)^2}{2\sigma^2\tau^2}\end{aligned}$$

On obtient donc la formule

$$(G_\sigma * G_\tau)(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2(\tau^2+\sigma^2)}}}{2\pi\sigma\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sqrt{\tau^2+\sigma^2}y-\frac{\tau^2}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}x)^2}{2\sigma^2\tau^2}} dy.$$

Posons maintenant

$$t = \sqrt{\tau^2+\sigma^2}y - \frac{\tau^2}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}\, x.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}(G_\sigma * G_\tau)(x) &= \frac{e^{\frac{-x^2}{2(\tau^2+\sigma^2)}}}{2\pi\sigma\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2\tau^2}} \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}} dt \\ &= \frac{e^{\frac{-x^2}{2(\tau^2+\sigma^2)}}}{2\pi\sigma\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}}} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2(\tau^2+\sigma^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau^2+\sigma^2}} = G_{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}(x)\end{aligned}$$

□

Exercice 5.8 Soient $a > 0$ et $f(x) = e^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(x) = e^{-ax^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) et $h(x) = xe^{-ax^2}$ ($x \in \mathbb{R}$). Calculer

$$f * f \qquad g * h \qquad h * h.$$

Solution: La fonction $f * f$ est paire et on a $(f * f)(y) = ye^{-y} + e^{-y}$ si $y \geq 0$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(g * h)(y) &= \int_{\mathbb{R}} dx\ e^{-ax^2}(y - x)e^{-a(y-x)^2} \\ &= -\frac{1}{2a} D_y(g * g)(y) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2a}} ye^{-ay^2/2}\end{aligned}$$

$$(g * g)(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{-ay^2/2}.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$(h * h)(y) = -\frac{1}{2a} D_y(g * h)(y).$$

□

Exercice 5.9 Soit $B = \{x : |x| \leq R\}$ la boule de centre 0 et de rayon R. Pour tout $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$, définissons la moyenne radiale de f par

$$\mathcal{M}_R f(x) = \frac{1}{\mathrm{mes}(B)} \int_{|x-y| \leq R} f(y) dy.$$

Montrer que

a) $\mathcal{M}_R f$ est continu,

b) $\mathcal{M}_R f \in \mathrm{L}^1$ si $f \in \mathrm{L}^1$ et $\int \mathcal{M}_R f dx = \int f dx$,

c) $\mathcal{M}_R f \in \mathrm{C}^p(\mathbb{R}^n)$ si $f \in \mathrm{C}^p(\mathbb{R}^n)$ et $D^k \mathcal{M}_R f = \mathcal{M}_R(D^k f)$ si $|k| \leq p$.

Solution: Il suffit de constater que

$$\mathcal{M}_R f(x) = f * \frac{\chi_B}{\mathrm{mes}\, B}$$

et d'utiliser les résultats vus au cours (χ_B est dans $\mathrm{L}^p_{\mathrm{comp}}$). □

Exercice 5.10 Montrer que si la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m z^m$$

converge absolument pour $|z| \leq a$ alors la fonction

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m \underbrace{f * \ldots * f}_{m}$$

appartient à L^1 si $\|f\|_1 \leq a$.

(*Suggestion:* Utiliser le critère de Cauchy pour les séries dans L^1.)

Exercice 5.11 Soit l'échelon de Heaviside

$$Y(x) = \chi_{]0,+\infty[}.$$

Si f, g sont localement intégrables dans $[0, +\infty[$ alors fY, gY sont composables et on a

$$fY * gY(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x < 0 \\ \int_0^x f(t)g(x-t)\, dt & \text{pour presque tout } x > 0 \\ & (\forall x > 0 \text{ si } f \text{ ou } g \text{ est continu}) \end{cases} .$$

Solution: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(t)Y(t)g(x-t)Y(x-t) &= f(t)g(x-t)\chi_{[0,+\infty[\cap]-\infty,x]}(t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ f(t)g(x-t)\chi_{[0,x]}(t) & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} .$$

Dès lors, pour tout $a > 0$ et tout $x \in [0, a]$, on obtient

$$f(t)Y(t)g(x-t)Y(x-t) = (f\chi_{[0,a]})(t)(g\chi_{[0,a]})(x-t). \tag{5.3}$$

Comme $f\chi_{[0,a]}$ et $g\chi_{[0,a]}$ sont intégrables, le cas $L^1 * L^1$ permet de dire que pour presque tout $x \in [0, a]$, la fonction (de t) $f(t)Y(t)g(x-t)Y(x-t)$ est intégrable. Si en outre f ou g est continu, (5.3) montre que, pour tout $x \in [0, a]$, $f(t)Y(t)g(x-t)Y(x-t)$ est le produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable, donc est intégrable. D'où la conclusion. $\square$

Exercice 5.12 Soit l'échelon de Heaviside $Y(x) = \chi_{]0,+\infty[}$; posons

$$Y_\lambda^{(m)}(x) = \frac{e^{\lambda x} x^{m-1}}{\Gamma(m)}\ Y(x)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$. On demande de montrer que

$$Y_\lambda^{(m+n)} = Y_\lambda^{(m)} * Y_\lambda^{(n)}.$$

Solution: Pour tout $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
(Y_\lambda^{(m)} * Y_\lambda^{(n)})_x &= \int_0^x \frac{e^{\lambda(x-y)}(x-y)^{m-1}}{\Gamma(m)}\ \frac{e^{\lambda y} y^{n-1}}{\Gamma(n)}\ dy \\
&= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^x (x-y)^{m-1} y^{n-1} dy.
\end{aligned}$$

Posons $y = xt$, il vient

$$\begin{aligned}
(Y_\lambda^{(m)} * Y_\lambda^{(n)})_x &= \frac{e^{\lambda x} x^{m+n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^{n-1} dt \\
&= \frac{\mathrm{B}(m,n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} e^{\lambda x} x^{m+n-1} \\
&= \frac{e^{\lambda x} x^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)}
\end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Exercice 5.13 Montrer que si $k \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et si $\|k\|_1 < 1$ alors l'opérateur

$$I - k* : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

est continu et admet un inverse continu de la forme

$$I + h* : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

avec $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\|h\|_1 \leq \frac{\|k\|_1}{1-\|k\|_1}$.

Solution: La théorie du produit de convolution montre que

$$\|k * f\|_1 \leq \|k\|_1 \|f\|_1$$

pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Par conséquent, l'opérateur

$$I - k* : f \rightsquigarrow f - k * f$$

est continu. De plus, si l'on pose

$$k^{*n} = \underbrace{k * \ldots * k}_{n},$$

on voit que

$$\|k^{*n}\|_1 \leq \|k\|_1^n$$

d'où l'on tire la convergence dans L^1 de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} k^{*n}.$$

Notons h la somme de cette série. Il est clair que

$$\|h\|_1 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|k\|_1^n = \frac{\|k\|_1}{1 - \|k\|_1}$$

et que

$$k * h + k = h.$$

On déduit de cette relation que

$$(I - k*) \circ (I + h*) = I + h * - k * - (k * h)* = I$$

et que

$$(I + h*) \circ (I - k*) = I - k * + h * - (h * k)* = I.$$

D'où la conclusion. □

Exercice 5.14 [*Equation de Volterra de deuxième espèce*]

Notons L^+ l'espace des fonctions localement intégrables à support dans $[0, +\infty[$. Montrer que deux éléments f et g de L^+ sont convolables et que

$$(f * g)_x = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Généraliser à L^+ l'exercice précédent en montrant que si $k \in \mathrm{L}^+$ alors l'opérateur

$$I - k* : \mathrm{L}^+ \to \mathrm{L}^+$$

admet un inverse de la forme

$$I + h* : \mathrm{L}^+ \to \mathrm{L}^+$$

où $h \in \mathrm{L}^+$.

Solution: Soit ϵ un réel positif tel que

$$\int_0^\epsilon |k(x)|\, dx < 1.$$

Si f est nul sous a (i.e. $\mathrm{Supp}(f) \subset [a, +\infty[$) alors $k * f$ est nul sous a et pour tout $x \in [a, a+2]$, on a

$$\begin{aligned}(k * f)_x &= \int k(x-t)f(t)dt = \int_a^x k(x-t)f(t)dt \\ &= (k\chi_{[0,\epsilon]} * f\chi_{[0,\epsilon]})_x.\end{aligned}$$

Posons $k_\epsilon = k\chi_{[0,\epsilon]}$. L'exercice précédent montre que l'opérateur

$$I - k_\epsilon * : \mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^1$$

admet un inverse de la forme

$$I + h_\epsilon * : \mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^1$$

avec $h_\epsilon \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^+$.

Fixons à présent $g \in \mathrm{L}^+$ et montrons par récurrence sur m que l'on peut construire une suite f_m de L^+ telle que

- $f_{m+1} = f_m$ sur $[0, m\epsilon]$
- $f_m - k * f_m = g$ sur $[0, m\epsilon]$

Comme $f_0 = 0$ convient, supposons disposer de $f_1, \ldots, f_m$ et construisons f_{m+1}. Posons

$$g_m = g - f_m + k * f_m$$

et

$$\Delta_m = g_m\chi_{[m\epsilon, m\epsilon+\epsilon]} + h_\epsilon * g_m\chi_{[m\epsilon, m2+2]}.$$

Il est clair que g_m et Δ_m sont nuls sous $m\epsilon$ et que

$$\Delta_m - k_\epsilon * \Delta_m = g_m\chi_{[m\epsilon, m\epsilon+\epsilon]}.$$

De cette relation, on tire que $\Delta_m - k_\epsilon * \Delta_m - g_m$ est nul sous $(m+1)\epsilon$. Tenant compte de la définition de g_m, on voit que

$$\Delta_m - k * \Delta_m + f_m - k * f_m - g$$

est nul sous $(m+1)\epsilon$. On peut donc poser $f_{m+1} = f_m + \Delta_m$. Si l'on note f la fonction de L^+ qui coïncide avec f_m sur $[0, m\epsilon]$ pour tout m, il est clair que l'on a

$$f - k * f = g.$$

Ainsi, l'équation $f - k * f = g$ a une solution dans L^+ pour tout $g \in \mathrm{L}^+$. Notons h la solution de l'équation

$$h - k * h = k.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} (I + h*) \circ (I - k*) &= I - k * + h * - h * k* = I \\ (I - k*) \circ (I + h*) &= I + h * - k * - k * h* = I \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

L'équation étudiée ci-dessus mise sous la forme

$$f(x) - \int_0^x k(x-t) f(t) dt = g(x)$$

est un des cas les plus importants de l'équation de Volterra de seconde espèce dont la forme classique est donnée par

$$f(x) - \int_0^x k(x,t) f(t) dt = g(x)$$

où le noyau $k(x,t)$ est généralement supposé continu. □

Exercice 5.15 Résoudre l'équation de Volterra suivante

$$u(x) - \int_0^x e^{2(y-x)} u(y) dy = e^{-x}$$

pour $x > 0$. Montrer que la solution est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Solution: Posons

$$k(x) = e^{-2x} Y(x).$$

L'équation s'écrit

$$uY - k * uY = e^{-x} Y.$$

Or $k \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et

$$\|k\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}$$

donc la solution u est donnée par

$$uY = e^{-x}Y + \sum_{m=1}^{+\infty} k^{*(m)} * e^{-x}Y.$$

Or

$$k^{*(m)} = Y_{-2}^{*(m)} = Y_{-2}^{(m)} = \frac{e^{-2x}x^{m-1}}{\Gamma(m)}\, Y(x)$$

donc

$$\sum_{m=1}^{+\infty} k^{*(n)} = e^{-2x} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} = e^{-x}.$$

La solution est donc donnée par

$$uY = e^{-x}Y + Y_{-1}^{(1)} * Y_{-1}^{(1)} = (1+x)e^{-x}.$$

□

Exercice 5.16 Soit b une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, positive et bornée sur $\mathbb{R}^n$. Si

$$\lim_{x,y\to\infty;|x-y|\to 0} |b(x) - b(y)| = 0$$

(ce qui est le cas si $\lim_{x\to\infty} b(x)$ existe et est finie) et si

$$\lim_{x\to\infty} (f * b)(x) = 0$$

pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = 0.$$

Solution: Procédons par l'absurde. Si b ne converge pas vers 0 à l'infini, il existe $\epsilon > 0$ et une suite x_m $(m \in \mathbb{N})$ de points de $\mathbb{R}^n$ tels que $|x_m| \geq m$ et $b(x_m) \geq 2\epsilon$ pour tout m.

Cela étant, comme $\lim |b(x) - b(y)| = 0$ si $x, y \to \infty; |x-y| \to 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ et $R \in]0, 1[$ tels que

$$(|x|, |y| \geq M \;\text{ et }\; |x-y| \leq R) \Rightarrow |b(x) - b(y)| \leq \epsilon.$$

Dès lors, pour tout $m \geq M+1$, on a $|x_m| \geq M+1$ et il s'ensuit que

$$y \in b(x_m, R) \Rightarrow |b(x_m) - b(y)| \leq \epsilon.$$

On obtient donc aussi

$$y \in b(x_m, R) \Rightarrow b(y) \geq b(x_m) - |b(x_m) - b(y)| \geq \epsilon.$$

Soit alors $\rho \in \mathrm{L}^1(R^n)$ tel que $\mathrm{Supp}(\rho) = b(0, R), \rho \geq 0$ et $\int \rho dx = 1$. D'une part, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$(\rho * b)(x_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x_m - y)b(y)dy = \int_{b(x_m,R)} \rho(x_m - y)b(y)dy \geq \epsilon.$$

Mais, d'autre part, comme la suite x_m converge vers l'infini, on doit avoir

$$\lim_{m\to+\infty} (\rho * b)(x_m) = 0$$

(hypothèse). D'où une contradiction. □

Exercice 5.17 Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors $f = 0$ pp dans Ω si et seulement si $\int_\Omega dx\ f(x)\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$.

Solution: Bien sûr, si $f = 0$ pp sur Ω, on a $\int_\Omega dx\ f(x)\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$.

Démontrons la réciproque. Il suffit de montrer que pour tout compact K de Ω, f est nul pp sur K.

Soit ρ_ε une unité universelle approchée de composition. Pour tout compact K' de Ω, on a donc

$$(f\chi_{K'}) * \rho_\varepsilon \to f\chi_{K'} \quad \text{dans } L^1. \tag{5.4}$$

Prenons $K' = K_r$, avec $K_r = \{u \in \mathbb{R}^n : d(u, K) \leq r\} \subset \Omega$ et $\varepsilon \leq r$. On a alors

$$\begin{aligned}
((f\chi_{K'}) * \rho_\varepsilon)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} dy\ f(y)\chi_{K'}(y)\rho_\varepsilon(x-y) \\
&= \int_{K'} dy\ f(y)\rho_\varepsilon(x-y) \\
&= \int_\Omega dy\ f(y)\rho_\varepsilon(x-y)
\end{aligned}$$

pour tout $x \in K$ car $\mathrm{Supp}(\rho_\varepsilon(x - .)) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \varepsilon\} \subset K_r \subset \Omega$. Vu l'hypothèse, on obtient que $((f\chi_{K'}) * \rho_\varepsilon)(x) = 0$ pour tout $x \in K$ et pour tout $\varepsilon \leq r$. De ceci et de (5.4), on tire que $f = 0$ pp sur K. □

Exercice 5.18 On dit qu'une fonction $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ est dérivable dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ si il existe $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tel que

$$\int f(-D\varphi)dx = \int g\varphi dx$$

pour tous les $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Dans ces conditions, montrer que

a) La fonction g de la définition ci-dessus est unique *pp*. On la notera Df.

b) $D(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i Df_i$.

c) $Df = 0 \Leftrightarrow f$ est constant.

d) f est égal *pp* à $c + \int_0^t D_\tau f d\tau$ qui est une fonction continue.

e) Si f est continue et dérivable dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b D_\tau f d\tau.$$

f) Au sein de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, on a

$$Df = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h}.$$

g) Réciproquement, montrer que si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ alors f est dérivable dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Solution: a) Si g_1 et g_2 sont toutes deux telles que

$$\int f(-D\varphi)dx = \int g_1\varphi dx = \int g_2\varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$$

il est clair que

$$\int (g_1 - g_2)\varphi dx = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$. De là, on tire que $g_1 - g_2 = 0$ pp par un théorème d'annulation bien connu.

b) On a successivement :

$$\begin{aligned}
\int (\sum_{i=1}^{n} c_i f_i)(-D\varphi)dx &= \sum_{i=1}^{n} c_i \int f_i(-D\varphi)dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \int Df_i \varphi dx \\
&= \int (\sum_{i=1}^{n} c_i Df_i)\varphi dx
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$.

c) Soit φ une fonction de $\mathrm{D}(\mathbb{R})$. Il est clair que $\int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau)d\tau$ est dans $\mathrm{D}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)d\tau = 0$. Cela étant, soit $\rho \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$. Pour tout $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$, posons

$$\psi = \varphi - \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)d\tau.$$

Un calcul rapide montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau)d\tau = 0$. Il existe donc $\psi_1 \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi = D\psi_1$. On en déduit que

$$\int f(-D\psi_1)dx = \int (Df)\psi_1 dx = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\varphi(t) - \rho \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)d\tau \right])dt = 0$$

si $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$.

Posons $c = \int f(t)\rho(t)dt$. Il vient

$$\int f(t)\varphi(t)dt = \int c\varphi(t)dt.$$

Ainsi $f = c$ *pp* comme annoncé.

d) Soit $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$, on a successivement

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{0}^{t} D_\tau f d\tau)(-D_t\varphi)dt \\
&\qquad = -\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{0}^{t} d\tau (D_\tau f D_t \varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^{+\infty} dt \int_0^t d\tau D_\tau f D_t\varphi + \int_{-\infty}^0 dt \int_t^0 d\tau D_\tau f D_t\varphi \\
&= -\int_0^{+\infty} d\tau \int_\tau^{+\infty} dt D_\tau f D_t\varphi + \int_{-\infty}^0 d\tau \int_{-\infty}^\tau dt D_\tau f D_t\varphi \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) D_\tau f d\tau + \int_{-\infty}^0 \varphi(\tau) D_\tau f d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) D_\tau f d\tau.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\int_0^t D_\tau f d\tau$ est dérivable dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et que

$$D_t(\int_0^t D_\tau f d\tau) = D_t f$$

d'où la conclusion par c).

e) Vu d), on sait que

$$f(t) = \int_0^t D_\tau f d\tau + c$$

ainsi

$$f(b) - f(a) = \int_0^b D_\tau f d\tau - \int_0^a D_\tau f d\tau = \int_a^b D_\tau f d\tau.$$

f) Pour $h > 0$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - Df(x) \right| dx \\
&= \int_a^b \left| \frac{\int_x^{x+h} Df(\tau) d\tau}{h} - Df(x) \right| dx \\
&= \frac{1}{h} \int_a^b \left| \int_0^h Df(x+\tau) d\tau - \int_0^h Df(x) d\tau \right| dx \\
&\leq \frac{1}{h} \int_a^b (\int_0^h |Df(x+\tau) - Df(x)| \, d\tau) dx \\
&\leq \frac{1}{h} \int_0^h d\tau \int_a^b |Df(x+\tau) - Df(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

Supposons $h < 1$. Il vient

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{1}{h} \int_0^h d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left| Df\chi_{[a,b+1]}(x+\tau) - Df\chi_{[a,b+1]}(x) \right| dx \\
&\leq \frac{1}{h} \int_0^h \left\| Df\chi_{[a,b+1]}(\cdot + \tau) - Df\chi_{[a,b]}(\cdot) \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} d\tau.
\end{aligned}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\left\| Df\chi_{[a,b+1]}(\cdot + \tau) - Df\chi_{[a,b]}(\cdot) \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon$ si $|\tau| < \eta$. Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$I \leq \frac{1}{h} \int_0^h \epsilon d\tau \leq \epsilon$$

si $|h| < \eta$, ce qui suffit pour conclure.

g) Si

$$Df = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, il est clair que

$$\int Df \varphi dx = \lim_{h \to 0} \int \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \varphi(x) dx.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \varphi(x) dx &= \frac{1}{h} \left[\int f(x+h)\varphi(x)dx - \int f(x)\varphi(x)dx \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int f(y)\tilde{\varphi}(h-y)dy - \int f(y)\tilde{\varphi}(-y)\, dy \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[f * \tilde{\varphi}(h) - f * \tilde{\varphi}(0) \right] \\
&= (f * D\tilde{\varphi})_0 = \int f(x)(-D\varphi(x))dx
\end{aligned}$$

□

Exercice 5.19 [*Formule de Leibnitz dans* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$] Montrer que si f et g sont dérivables dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(]a,b[)$, alors $fg \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(]a,b[)$, y est dérivable et on a

$$D(fg) = Dfg + fDg.$$

En tirer une formule d'intégration par parties si a et b sont finis.

Solution: La propriété étant locale, on peut supposer a et b finis. On peut également supposer f et g continus et tels que $f(a) = g(a) = 0$ car si la propriété est exacte pour f et g, elle l'est aussi pour $f + c$ et $g + d$ avec $c, d \in \mathbb{C}$. Cela étant, on a, vu l'exercice précédent,

$$f(t) = \int_a^t D_\tau f \, d\tau \quad , \quad g(t) = \int_a^t D_\theta g d\theta.$$

On en déduit de suite que pour tout $\varphi \in D(]a,b[)$, on a

$$I = \int_a^b f(t)g(t)(-D_t\varphi)dt = \int_a^b -D_t\varphi dt \int_a^t D_\tau f d\tau \int_a^t D_\theta g d\theta.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_a^b d\tau D_\tau f \int_a^b d\theta D_\theta g \int_{\sup(\theta,\tau)}^b (-D_t\varphi)dt \\ &= \textstyle\int_a^b d\tau D_\tau f \int_a^b d\theta \varphi(\sup(\theta,\tau)) D_\theta g \\ &= \textstyle\int_a^b d\tau D_\tau f \int_a^\tau d\theta \varphi(\tau) D_\theta g + \int_a^b d\tau D_\tau f \int_\tau^b d\theta \varphi(\theta) D_\theta g. \end{aligned}$$

Un changement de l'ordre d'intégration dans le dernier terme conduit enfin à

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b g(\tau)\varphi(\tau) D_\tau f d\tau + \int_a^b d\theta \varphi(\theta) D_\theta g \int_a^\theta d\tau D_\tau f \\ &= \int_a^b (D_\tau f g + f D_\tau g)\varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Exercice 5.20 Montrer que

a) Si $f, g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[)$ alors fY et gY sont convolables et $fY * gY \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[)$ et s'annule sur $]-\infty, 0]$.

b) Si, de plus, f admet une dérivée dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(]0,+\infty[)$ alors $fY * gY$ admet une dérivée dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et

$$D(fY * gY) = DfY * gY + f(0)gY.$$

En déduire que si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $D(Y * fY) = fY$ et que si f admet en outre une dérivée $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ alors

$$Y * DfY = (f - f(0))Y.$$

Solution: a) est évident car si $x < a$

$$(fY * gY)_x = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = (f\chi_{[0,a]} * g\chi_{[0,a]})_x.$$

b) Etablissons d'abord que pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a

$$fY * D\varphi = DfY * \varphi + f(0)\varphi.$$

Pour cela, remarquons que

$$\begin{aligned}(fY * D\varphi)_x &= \int_0^{+\infty} f(t)(-D_t\varphi(x-t))dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[-D_t(f(t)\varphi(x-t)) + D_t f\varphi(x-t)\right] dt \\ &= f(t)\varphi(x-t)|_{t=0} + DfY * \varphi.\end{aligned}$$

Dans le cas général, on a

$$\begin{aligned}\int (fY * gY)_x(-D_x\varphi)dx &= ((fY * gY) * D\tilde{\varphi})_0 \\ &= ((fY * D\tilde{\varphi}) * gY)_0 \\ &= (DfY * gY * \tilde{\varphi})_0 + f(0)(gY * \tilde{\varphi})_0 \\ &= \int (DfY * gY)_x\varphi(x)dx + \int f(0)(gY)_x\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Exercice 5.21 Démontrer les assertions suivantes.

a) Si $f \in C_0([0,+\infty[)$ et si $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[))$, alors $fY * gY \in C_0([0,+\infty[)$.

b) Si $f \in C_1(\mathbb{R})$ et si $g \in C_0([0,+\infty[)$, alors $fY * gY \in C_1([0,+\infty[)$ et
$$D(fY * gY) = (Df)Y * gY + f(0)gY.$$

Solution: On a

$$(fY * gY)_x = \int fY(x-y)gY(y)dy = \int_0^x f(x-y)g(y)dy.$$

Le produit $fY * gY$ est donc bien défini et continu pour tout $x \in [0,+\infty[$. Considérons l'application

$$\varphi : \underset{x_1>0\ x_2>0}{(x_1, x_2)} \mapsto \int_0^{x_2} f(x_1 - y)g(y)dy.$$

Comme $f(x_1 - y)g(y)$ est continu en y sur $[0, +\infty[$, il est clair que φ est dérivable en x_2 et que $D_{x_2}\varphi = f(x_1 - x_2)g(x_2)$. Par le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on montre que φ est dérivable en x_1 et que

$$D_{x_1}\varphi = \int_0^{x_2} Df(x_1 - y)g(y)dy.$$

Comme $D_{x_1}\varphi$ et $D_{x_2}\varphi$ sont continus, φ est continûment dérivable et il en est de même de $\varphi(x, x)$. De plus,

$$\begin{aligned} D\varphi(x,x) &= D_{x_1}\varphi_{|(x,x)} + D_{x_2}\varphi_{|(x,x)} \\ &= \int_0^x Df(x-y)g(y)dy + f(0)g(x). \end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Exercice 5.22 [*Réponse impulsive des équations différentielles à coefficients constants*] Considérons l'opérateur de dérivation à coefficients constants $L(D)$ donné par

$$L(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k, \quad a_p \neq 0$$

et construisons la solution A de $L(D)A = 0$ telle que $A(0) = 0, \ldots, D^{p-2}A(0) = 0$, $D^{p-1}A(0) = 1/a_p$. On demande de montrer que :

a) La solution sur $]0, +\infty[$ du problème

$$L(D)u = f$$

$$u(0) = 0, \ldots, D^{p-1}u(0) = 0$$

où $f \in C_0([0, +\infty[)$ est donnée par

$$u = AY * fY$$

et est de classe C_p.

b) La solution la plus générale du problème homogène

$$L(D)u = 0$$

est donnée par

$$\sum_{k=0}^{p-1} c_k D^k A$$

les c_k étant des constantes arbitraires déterminées univoquement par les conditions initiales.

c) Si, pour tout $m \in \mathbb{N}$, f_m est une fonction positive, continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que

$$\int f_m(x)dx = 1$$

et que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{x>R} f_m(x)dx = 0 \ \forall R > 0$$

alors la solution u_m du problème

$$L(D)u_m = f_m$$

$$u_m(0), \ldots, D^{p-1}u_m(0) = 0$$

converge dans $C_0([0, +\infty[)$ vers AY. (Ce qui montre que AY est la réponse impulsive au sens de la physique.)

d) Les coefficients $(a_k)_{k=0}^{p}$ de $L(D)$ sont déterminés par les nombres $D^{p-1}A(0), \ldots, D^{2p-1}A(0)$. (On retrouve donc le modèle à partir de sa réponse impulsive.)

Solution:

a) Vu l'exercice précédent, on a

$$\begin{array}{lll} u & = & AY * fY \\ Du & = & DAY * fY + A(0)fY = DAY * fY \\ D^{p-1}u & = & D^{p-1}AY * fY + D^{p-2}A(0)fY \\ & = & D^{p-1}AY * fY \\ D^p u & = & D^p AY * fY + \frac{1}{a_p} fY \end{array}$$

ainsi $u \in \mathrm{C}^p([0, +\infty[)$ et $\mathrm{L}(D)u = fY$ sur $[0, +\infty[$.

De plus, $u(0) = 0, \ldots, D^{p-1}u(0) = 0$ ce qui permet de conclure.

b) Il est clair que

$$L(D)(\sum_{k=0}^{p-1} C_k D^k A) = 0.$$

Calculons les conditions initiales correspondant à cette solution

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} C_k D^k A.$$

Il vient

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ Du(0) \\ \vdots \\ D^{p-1}u(0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A(0) & \cdots & D^{p-1}A(0) \\ DA(0) & \cdots & D^p A(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{p-1}A(0) & \cdots & D^{2p-2}A(0) \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice M est triangulaire inférieure et a tous ses éléments contre-diagonaux égaux à $1/a_p$, elle est non singulière. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les constantes $(C_0, \ldots, C_{p-1})$ et les conditions initiales; ainsi toute solution de $L(D)u = 0$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{p-1} C_k D^k A$.

c) La suite f_m vérifie les conditions imposées à une unité approchée de convolution (Cours page II.26). Comme AY est uniformément continue sur tout compact K de $[0, +\infty[$, on a $AY * f_m \underset{K}{\rightrightarrows} AY$, ce qui permet de conclure.

d) Comme $\sum_{k=0}^{p-1} a_k D^k A + a_p D^p A = 0$, il est clair vu ce qui précède que l'on a

$$\begin{pmatrix} -a_p D^p A(0) \\ -a_p D^{p+1} A(0) \\ \vdots \\ -a_p D^{2p-1} A(0) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$$

et la conclusion vient alors de ce que $D^{p-1}A(0) = 1/a_p$. □

Exercice 5.23 Utiliser la méthode vue à l'exercice précédent pour étudier le circuit dont l'équation est

$$\begin{cases} LD_t i + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = f(t) \quad \text{sur }]0,+\infty[\\ i(0) = 0 \end{cases}$$

en considérant des $f \in C_1([0,+\infty[)$.

Solution: Considérons le problème équivalent

$$\begin{cases} LD_t^2 i + RD_t i + \frac{1}{C} i = D_t f \quad \text{sur } ([0,+\infty[) \\ i(0) = 0 \\ LD_t i(0) = f(0) \end{cases}.$$

Résolvons d'abord

$$\begin{cases} LD_t^2 A + RD_t A + \frac{1}{C} A = 0 \\ A(0) = 0 \\ D_t A(0) = \frac{1}{L} \end{cases}.$$

Le polynôme caractéristique $L(z) = Lz^2 + Rz + \frac{1}{C}$ a pour discriminant $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$. Trois cas sont à considérer.

1) Cas $\Delta < 0$ —

Les zéros sont

$$\frac{-R - i\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} \quad \text{et} \quad \frac{-R + i\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}.$$

Posons

$$a = \frac{R}{2L}$$

et

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Il vient

$$A(t) = e^{-at}\,(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Comme $A(0) = 0$, on a $C_1 = 0$. Ainsi $DA = e^{-at}(C_2\omega\cos\omega t - aC_2\sin\omega t)$.

De la relation $DA(0) = \frac{1}{L}$, on tire $C_2 = \frac{1}{\omega L}$, ainsi $A(t) = \frac{1}{\omega L}e^{-at}\sin\omega t$. Maintenant, nous savons que

$$iY = AY * DfY + c_0 AY + c_1 DAY.$$

Donc

$$i(0) = c_0 A(0) + c_1 DA(0) = c_1 \frac{1}{L}$$

et

$$Di(0) = c_0 DA(0) + c_1 D^2 A(0) = c_0 \frac{1}{L} + c_1 \frac{-R}{L^2}.$$

Ainsi, $c_1 = 0$ et $c_0 = f(0)$. La solution cherchée s'écrit donc

$$iY = AY * DfY + f(0)AY = D(AY * fY) \quad \text{sur} \quad]0, +\infty[\,.$$

Finalement, on obtient

$$iY = (DA)Y * fY.$$

Or

$$\begin{aligned} DA &= \frac{1}{\omega L}\left[-ae^{-at}\sin\omega t + e^{-at}\omega\cos\omega t\right] \\ &= \frac{e^{-at}}{\omega L}[-a\sin\omega t + \omega\cos\omega t]. \end{aligned}$$

On a

$$a^2 + \omega^2 = \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

donc il existe $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}}\cos\varphi \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sin\varphi.$$

Il vient

$$\begin{aligned} DA &= \frac{e^{-at}}{\omega L}\,\frac{1}{\sqrt{LC}}(\cos\omega t\sin\varphi - \sin\omega t\cos\varphi) \\ &= \frac{e^{-at}}{L\sin\varphi}\sin(\varphi - \omega t). \end{aligned}$$

2) Cas $\Delta = 0$ —

Le zéro double est $\frac{-R}{2L} = -a$. On a de plus

$$A(t) = e^{-at} \quad (C_1 t + C_2).$$

Comme $A(0) = 0$, il vient $C_2 = 0$. Et comme $DA = e^{-at}(C_1 - a(C_1 t + C_2))$, on a $C_1 = \frac{1}{L}$. Ainsi

$$A(t) = \frac{t}{L}\, e^{-at}.$$

En procédant comme dans le cas ci-dessus, on voit que

$$iY = DAY * fY$$

avec

$$DA = \frac{t}{L}\,(-a)e^{-at} + \frac{1}{L}\, e^{-at} = \frac{1-at}{L}\, e^{-at}.$$

3) Cas $\Delta > 0$ —Les zéros sont

$$\frac{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \quad \text{et} \quad \frac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}.$$

Posons $a = \frac{R}{2L}$ et $\omega = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$. La solution $A(t)$ cherchée s'écrit

$$A(t) = (C_1 \mathrm{sh}\omega t + C_2 \mathrm{ch}\omega t)e^{-at}.$$

De $A(0) = 0$, on déduit que $C_2 = 0$. On a

$$DA(t) = C_1 \omega \mathrm{ch}\omega t e^{-at} + C_1 \mathrm{sh}\omega t(-a)e^{-at}.$$

Ainsi $DA(0) = C_1\omega = \frac{1}{L}$, il en résulte que

$$A(t) = \frac{1}{\omega L}\mathrm{sh}\omega t e^{-at}.$$

Comme ci-dessus, on montre que

$$iY = DAY * fY$$

et

$$\begin{aligned} DA &= \frac{1}{\omega L}\omega \mathrm{ch}\omega t e^{-at} + \frac{1}{\omega L}\mathrm{sh}\omega t(-a)e^{-at} \\ &= \frac{1}{\omega L}e^{-at}(\omega \mathrm{ch}\omega t - a \mathrm{sh}\omega t). \end{aligned}$$

Ainsi, si nous posons

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}}\mathrm{ch}\varphi \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\mathrm{sh}\varphi,$$

il vient

$$DA = \frac{1}{\omega L}e^{-at}\frac{1}{\sqrt{LC}}\mathrm{sh}(\varphi - \omega t) = \frac{e^{-at}}{L\mathrm{sh}\varphi}\ \mathrm{sh}(\varphi - \omega t).$$

Remarquons que comme $\omega < a$, $\lim_{t\to+\infty} DA(t) = 0$.

Donnons à présent une représentation graphique des trois types de réponses impulsives :

Amortissement fort Amortissement faible

Amortissement critique

On peut remarquer que bien que la forme analytique des réponses change brutalement pour $\Delta < 0, \Delta = 0$ et $\Delta > 0$, le graphique, lui, présente une évolution beaucoup plus continue. □

Exercice 5.24 [*Inégalités de Young*]
Si $f \in \mathrm{L}^p$, si $g \in \mathrm{L}^q$ et s'il existe $r \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r},$$

alors

a) $f * g$ est défini *pp*,

b) $f * g \in \mathrm{L}^r$,

c) $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Solution: Il suffit de constater que

$$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p\, |g(y)|^q)^{1/r}(|f(x-y)|^p)^{1/p-1/r}(|g(y)|^q)^{1/q-1/r}$$

puis d'appliquer la généralisation de l'inégalité de Hölder établie en (4.14) aux trois facteurs du second membre. Cela montre que $|f(x-y)g(y)|$ est intégrable en y

pour presque tout x et que

$$|(f*g)_x| \leq (|f|^p * |g|^q)_x^{1/r} \parallel |f|^p \|_1^{1/p-1/r} \parallel |g|^q \|_1^{1/q-1/r} .$$

On en tire que

$$|(f*g)|^r \leq |f|^p * |g|^q \, \|f\|_p^{r-p} \, \|g\|_q^{r-q} .$$

Ainsi $f*g \in L^r$ et

$$\|f*g\|_r^r \leq \|f\|_p^p \, \|g\|_q^q \, \|f\|_p^{r-p} \, \|g\|_q^{r-q} ,$$

d'où la conclusion. □

Exercice 5.25 Compléter l'exercice précédent en montrant que si $f \in \mathrm{L}^p$, si $g \in \mathrm{L}^q$ et si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alors

a) $f*g$ est défini partout,

b) $f*g$ est uniformément continu,

c) $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.

Solution: L'inégalité de Hölder montre que $f(x-y)g(y)$ est intégrable pour tout x et que

$$\left| \int f(x-y)g(y)dy \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

On en déduit que $f*g$ est défini partout et que

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

De plus, il est clair que

$$(f*g)_{x+h} - (f*g)_x = \int [f(x+hy) - f(x)]g(y)dy.$$

Donc, vu ce qui précède,

$$\begin{aligned} |(f*g)_{x+h} - (f*g)_x| &\leq [(f(\cdot + h) - f(\cdot)) * g]_x \\ &\leq \|f(x+h) - f(x)\|_p \, \|g\|_q , \end{aligned}$$

d'où il résulte que $f*g$ est uniformément continu. □

Chapitre 6

Transformation de Fourier dans L^1

Exercice 6.1 Démontrer que, dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, 0 est le seul élément tel que $f * f = f$.

Solution: Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ vérifie

$$f * f = f$$

alors, par transformation de Fourier, on obtient

$$\mathcal{F}_x^+ f(1 - \mathcal{F}_x^+ f) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On en déduit que $\mathbb{R}^n = F_1 \cup F_2$ où

$$F_1 = \{x : \mathcal{F}_x^+ f = 0\} \qquad\qquad F_2 = \{x : \mathcal{F}_x^+ f = 1\}.$$

Comme ces fermés sont disjoints et que $\mathbb{R}^n$ est connexe, $F_1 = \mathbb{R}^n$ ou $F_2 = \mathbb{R}^n$. Mais par le théorème de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{x \to \infty} \mathcal{F}_x^+ f = 0$$

donc on ne peut avoir $F_2 = \mathbb{R}^n$, ce qui permet de conclure. $\square$

Exercice 6.2 (Transformées de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.) Si $k > 0$, établir que

a) $\mathcal{F}_y^{\pm}(\frac{1}{x^2+k^2}) = \frac{\pi}{k}e^{-k|y|}$,

b) $\mathcal{F}_y^{\pm}(e^{-k|x|}) = \frac{2k}{y^2+k^2}$,

c) $\mathcal{F}_y^{\pm}(e^{-kx^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{-\frac{y^2}{4k}}$,

d) $\mathcal{F}_y^{\pm}((1-k\,|x|)\chi_{[-1/k,1/k]}(x)) = \frac{1}{k}\left(\frac{\sin(\frac{y}{2k})}{(\frac{y}{2k})}\right)^2$.

(*Suggestion:* Etablir (b) puis (a) par le théorème de Fourier. Pour (c), voir le calcul figurant dans la démonstration du théorème de Fourier. Calculer (d) en séparant l'intégrale selon le signe de x et terminer en intégrant par parties.)

Exercice 6.3 Soient $f \in L^1([0,+\infty[)$ et $a > 0$. Montrer que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathcal{F}^c_{y\to x}f(y)\ e^{-ax}\ dx &= \int_0^{+\infty} \frac{af(x)}{x^2+a^2}\ dx \\
\int_0^{+\infty} \mathcal{F}^s_{y\to x}f(y)\ e^{-ax}\ dx &= \int_0^{+\infty} \frac{xf(x)}{x^2+a^2}\ dx \\
\int_0^{+\infty} \mathcal{F}^c_{y\to x}f(y)\ e^{-ax^2}\ dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_0^{+\infty} f(x)\ e^{-x^2/(4a)}\ dx
\end{aligned}$$

Solution: Il suffit d'utiliser le théorème de transfert en se rappelant que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^c_{x\to y}e^{-ax} &= \frac{a}{a^2+y^2} \\
\mathcal{F}^s_{x\to y}e^{-ax} &= \frac{y}{a^2+y^2} \\
\mathcal{F}^c_{x\to y}e^{-ax^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-y^2/(4a)}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 6.4 Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}.$$

Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$R_a * R_b = R_{a+b}.$$

Solution: On a

$$\mathcal{F}^{\pm}_{t\to x} e^{-\lambda t} = 2\frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}.$$

Dès lors, le théorème de Fourier donne

$$\mathcal{F}^{\pm}_x(R_a * R_b) = \mathcal{F}^{\pm}_x R_a \ \mathcal{F}^{\pm}_x R_b = e^{-(a+b)|x|}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc aussi

$$(R_a * R_b)(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{\mp}_{y\to x} e^{-(a+b)|y|} = R_{a+b}(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

Exercice 6.5 Montrer que l'équation

$$f * X = g$$

admet une et une seule solution $X \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ si

a) $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$,

b) $|\mathcal{F}^+ f| > 0$,

c) $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}^+ g)$ compact.

Solution: Il est clair que si X est une solution L^1 de l'équation étudiée,

$$\mathcal{F}^+ f \mathcal{F}^+ X = \mathcal{F}^+ g.$$

Ainsi

$$\mathcal{F}^+ X = \mathcal{F}^+ g / \mathcal{F}^+ f$$

et comme $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}^+ g)$ est compact,

$$X = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+ g/\mathcal{F}^+ f).$$

L'unicité de la solution est donc assurée et il reste à établir son existence au sein de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Supposons d'abord que $\mathcal{F}^+_{\xi_0} f = 1$ et que $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}^+ g) \subset \mathrm{B}(\xi_0, \epsilon)$. Notons α une fonction de classe C^∞ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} \alpha(x) = 1 & \text{si } x \in \mathrm{B}(0,1) \\ \alpha(x) = 0 & \text{si } x \notin \mathrm{B}(0,2) \end{cases}$$

et posons $\alpha_\epsilon(x) = \alpha(x/\epsilon)$. Remarquons que l'on a

$$(\mathcal{F}^+_\xi f - \mathcal{F}^+_{\xi_0} f)\alpha_\epsilon(\xi - \xi_0) = \mathcal{F}^+_\xi h_\epsilon$$

où

$$(2\pi)^n h_\epsilon = f * \mathcal{F}^- \alpha_\epsilon(\xi - \xi_0) - (\mathcal{F}^-_{\xi_0} f)\mathcal{F}^- \alpha_\epsilon(\xi - \xi_0).$$

Un calcul simple montre que

$$(2\pi)^n \|h_\epsilon\|_1 \leq \int |f(u)| \left\|\mathcal{F}^-_{x-\epsilon u}\alpha - \mathcal{F}^-_x \alpha\right\|_1 du.$$

Le théorème de Lebesgue permet d'en déduire que $\lim_{\epsilon\to 0} \|h_\epsilon\|_1 = 0$. Fixonx $\epsilon > 0$ de sorte que $\|h_\epsilon\|_1 < 1$. Par construction de h_ϵ, il est clair que les solutions L^1 de l'équation

$$f * X = g$$

sont les solutions L^1 de l'équation

$$X + X * h_\epsilon = g$$

car on a $|1 + \mathcal{F}^+ h_\epsilon| > 0$ et $1 + \mathcal{F}^+_\xi h_\epsilon = \mathcal{F}^+_\xi f$ si $\xi \in \mathrm{B}(\xi_0, \epsilon)$. L'existence d'une solution vient alors de ce que cette dernière équation admet une solution L^1 lorsque $\|h_\epsilon\| < 1$ (cf. Ex. 5.13).

On peut résumer ce résultat en affirmant que pour tout ξ_0 il existe $\epsilon_{\xi_0} > 0$ tel que l'équation

$$f * X = g$$

admet une solution $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ si $\mathrm{Supp}\,(\mathcal{F}^+ g) \subset \mathrm{B}(\xi_0, \epsilon_{\xi_0})$ et si $\mathcal{F}^+_{\xi_0} f = 1$.

Par linéarité, on se défait aisément de la restriction sur $\mathcal{F}^+_{\xi_0} f$.

Pour conclure, il suffit alors de considérer une partition $(\phi_i)_{i\in I}$ de classe D^∞ localement finie de l'unité subordonnée au recouvrement $\{\mathrm{B}(\xi_0, \epsilon_{\xi_0}\} : \xi_0 \in \mathbb{R}^n\}$, de construire les solution X_i des équations

$$f * X_i = \mathcal{F}^- \phi_i * g$$

pour chaque $i \in I$ et de constater que

$$X = \sum_{i\in I} X_i$$

est une solution de classe $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ de

$$f * X = g$$

puisque

$$\{i \in I : X_i \neq 0\} \subset \{i \in I : \phi_i \mathcal{F}^+ g \neq 0\}$$

et que ce dernier ensemble est fini. □

Exercice 6.6 [*Théorème de N. Wiener*]
Soit $f_0 \in \mathrm{L}^1$ tel que $\mathcal{F}_y^\pm f_0 \neq 0$ pour tout y. S'il existe $b \in \mathrm{L}^\infty$ et $A \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lim_{x\to\infty} (f_0 * b)(x) = A \int f_0(t)dt,$$

alors on a

$$\lim_{x\to\infty} (f * b)(x) = A \int f(t)dt$$

pour toute fonction intégrable f.

(*Suggestion:* Comme on a $(f*b)(x) - A\int f(t)dt = (f*(b-A))(x)$, il suffit d'établir le résultat pour $A = 0$.

Posons $L := \{f \in \mathrm{L}^1 : \lim_{x\to+\infty}(f * b)(x) = 0\}$ et démontrons que cet ensemble coïncide avec L^1.

Pour cela, remarquons d'abord que L jouit des propriétés suivantes :

a) L est un sous-espace linéaire de L^1;

b) L est fermé dans L^1;

c) si f est un élément de L, alors la fonction $F * f$ appartient à L pour toute fonction intégrable F.

Cela étant, soit K une fonction intégrable dont le support de la transformée de Fourier est compact (par exemple $K =$ la transformée de Fourier d'un élément de $\mathrm{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons $g_m := m^n K(mx)$. Comme $\mathcal{F}_y^\pm g_m = \mathcal{F}_{y/m}^\pm K$, le support de la transformée de Fourier de g_m est aussi compact. Il s'ensuit qu'il existe $X_m \in \mathrm{L}^1$ tel que $f_0 * X_m = g_m$ et par conséquent (vu c)) $g_m \in L$ et $g_m * F \in L$ pour tout m et toute fonction intégrable F.

Fixons à présent un élément F de L^1 et démontrons que $F \in L$. Pour tout m, la fonction $f_m := g_m * F$ appartient à L. De plus, la suite f_m converge dans L^1 vers la fonction $(\mathcal{F}_0 K)F$. Il s'ensuit que $(\mathcal{F}_0 K)F$ est un élément de L et par suite F est aussi un élément de L si l'on a pris soin au départ de choisir K tel que $\mathcal{F}_0 K \neq 0$.

NB: L'hypothèse $\mathcal{F}_y^\pm f_0 \neq 0$ pour tout y est indispensable pour que ce résultat soit valable. De fait, pour toute fonction intégrable f et tout $t \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(e^{\mp i\langle t,\cdot\rangle} * f)(x) = e^{\mp i\langle t,x\rangle} \mathcal{F}_t^\pm f.$$

Dès lors si $\mathcal{F}_t^{\pm} f_0 = 0$, on a $\lim_{x\to+\infty}(b * f_0)(x) = 0$ avec $b(\cdot) := e^{\mp i\langle t,\cdot\rangle}$. Mais si l'on pose $f(x) := \exp(|x|^2)$, la fonction $b * f$ ne converge pas vers 0 quand x tend vers l'infini.)

Exercice 6.7 Rappelons qu'un fermé est régulier s'il est l'adhérence de son intérieur. On demande de montrer que la régularité est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un fermé de $\mathbb{R}^n$ soit le support de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Solution: Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dans tout voisinage U d'un point $x \in \operatorname{Supp} \mathcal{F}^{\pm} f$, il existe un point y tel que $\mathcal{F}_y^{\pm} f \neq 0$. Comme $\mathcal{F}^{\pm}_{\cdot} f$ est une fonction continue, ce point possède un voisinage où $\mathcal{F}^{\pm} f$ ne s'annule pas et est par conséquent intérieur à $\operatorname{Supp} \mathcal{F}^{\pm} f$. Le point de départ, x, est donc adhérent à $(\operatorname{Supp} \mathcal{F}^{\pm} f)^0$. On en déduit que le fermé $\operatorname{Supp} \mathcal{F}^{\pm} f$ est régulier.

Si F est un fermé régulier, posons $\Omega = \mathring{F}$. Si $\Omega = \emptyset$, $F = \emptyset$ et $F = \operatorname{Supp} \mathcal{F}^{\pm} 0$, d'où la conclusion. Si $\Omega \neq \emptyset$, il existe une suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'intervalles compacts de Ω qui le recouvre. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, fixons une fonction positive $\varphi_k \in \mathrm{D}^{\infty}(\Omega)$ égale à 1 sur I_k. Posons

$$f_k = 2^{-k} \left\|\mathcal{F}^{\mp}\varphi_k\right\|_1^{-1} \mathcal{F}^{\mp}\varphi_k$$

de sorte que

$$\|f_k\|_1 = 2^{-k} \quad , \quad \mathcal{F}^{\pm} f_k = (2\pi)^n 2^{-k} \left\|\mathcal{F}^{\mp}\varphi_k\right\|_1^{-1} \varphi_k$$

Remarquons que la série des f_k est convergente dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et posons

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k.$$

Il résulte de cette définition que dans $\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathcal{F}^{\pm} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}^{\pm} f_k.$$

Vu la définition de f_k, il est clair que

$$\begin{cases} \mathcal{F}_x^{\pm} f > 0 & \text{si } x \in F^{\circ} \\ \mathcal{F}_x^{\pm} f = 0 & \text{si } x \notin F^{\circ} \end{cases}.$$

Cela montre que $\operatorname{Supp} \mathcal{F}_x^{\pm} f = F^{\circ -} = F$, d'où la conclusion. $\square$

Exercice 6.8 Démontrer que la transformée de Fourier d'une fonction radiale intégrable est une fonction radiale.

Solution: Soit F une telle fonction et soient x, y des points de $\mathbb{R}^n$ de même module. Si U est une matrice orthogonale telle que $Uy = x$, alors on a

$$\mathcal{F}_x^{\pm} F = \mathcal{F}_{Uy}^{\pm} F = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\langle Uy,t\rangle} F(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\langle y,\tilde{U}t\rangle} F(\tilde{U}t)dt.$$

Par le changement de variables linéaire $t' = \tilde{U}t$, on obtient alors

$$\mathcal{F}_x^{\pm} F = \mathcal{F}_y^{\pm} F.$$

□

Exercice 6.9 [*Formules de S. Bochner*]

Dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{F}_y^{\pm} F = \int_0^{+\infty} f(r) r^{n-1} V_n(r\,|y|)dr,$$

où f est la fonction telle que $F(x) = f(|x|) \forall x \in \mathbb{R}^n$, où pour $r \geq 0$ on a

$$V_1(r) = 2\cos r\ ,$$

et où

$$V_n(r) = \frac{4\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(r\cos\theta)\sin^{n-2}\theta d\theta \quad (\text{ si } n \geq 2).$$

En particulier, on a dans $\mathbb{R}^2$:

$$V_2(r) = 4\int_0^{\pi/2} \cos(r\cos\theta)d\theta;$$

et dans $\mathbb{R}^3$:

$$V_3(r) = 4\pi \sin r/r.$$

(*Suggestion:* Utiliser l'exercice précédent.)

Exercice 6.10 [*Transformée de Fourier d'une fonction radiale*]
Soit $k > 0$. Dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, calculer $\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y} e^{-k|x|}$.

Solution: Appliquer les formules de Bochner. Traitons le cas de $\mathbb{R}^3$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y} e^{-k|x|} &= \frac{4\pi}{|y|}\int_0^{+\infty} re^{-kr}\sin(r\,|y|)dr \\
&= \frac{4\pi}{|y|}\Im\left(\int_0^{+\infty} re^{-kr}e^{ir|y|}dr\right) \\
&= \Im\frac{4\pi}{|y|}\left[r\,\frac{e^{(-k+i|y|)r}}{-k+i\,|y|}\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{(-k+i|y|)r}}{-k+i\,|y|}dr\right].
\end{aligned}$$

Une intégration par variation de la primitive conduit alors à

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y} e^{-k|x|} &= \Im\left[-\frac{4\pi}{|y|}\,\frac{e^{(-k+i|y|)r}}{(-k+i\,|y|)^2}\Bigg|_0^{+\infty}\right] \\
&= \Im\left[\frac{4\pi}{|y|}\,\frac{(-k-i\,|y|)^2}{(k^2+|y|^2)^2}\right] \\
&= \frac{4\pi}{|y|}\,\frac{2k\,|y|}{(k^2+|y|^2)^2} \\
&= \frac{8\pi k}{(k^2+|y|^2)^2}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 6.11 Montrer que si $a > 0$,

$$\mathcal{F}^{\pm}(\chi_{]-a,a[}) = \frac{2\sin ax}{x}.$$

Exercice 6.12 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin(2m+1)x/\sin x\; dx = \pi/2.$$

En déduire que

$$\int_0^{\to+\infty} dx\;\frac{\sin x}{x} = \pi/2.$$

Solution: De fait, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in]0, \pi/2[$, on a

$$F_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} e^{2ikx} = (e^{ix(2m+1)} - e^{-ix(2m+1)})/(e^{ix} - e^{-ix}) = \sin(2m+1)x/\sin x$$

(somme de termes d'une progression géométrique de raison e^{2ix}). Dès lors, on obtient

$$I_m = \int_0^{\pi/2} F_m(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=-m}^{m} e^{2ikx}dx = \pi/2 + \sum_{k=1}^{m} 2\int_0^{\pi/2} \cos 2kx\, dx = \pi/2.$$

Pour en déduire la valeur de l'intégrale fléchée, procédons en deux étapes.

a) — Posons

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} - \frac{\sin(2m+1)x}{x} \right) dx.$$

On a $\lim_{m\to+\infty} J_m = 0$.

De fait, posons $f(x) := (1/\sin x - 1/x)\chi_{]0,\pi/2[}(x)$. Cette fonction est intégrable et on a $\Im\mathcal{F}^+ f = \int_0^{\pi/2}(1/\sin x - 1/x)\sin xy\, dx$. Dès lors, le théorème de Riemann-Lebesgue entraîne $\lim_{m\to+\infty} J_m = 0$.

b) — Cela étant, de (a) et de la valeur constante de I_m, on déduit que

$$\begin{aligned}\pi/2 &= \lim_m \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m+1)x}{x} dx \\ &= \lim_m \int_0^{(2m+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.\end{aligned}$$

□

Exercice 6.13 Soient $a, b > 0$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} dx\ \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2},\quad \int_0^{\to+\infty} dx\ \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}$$

et

$$\int_0^{\to+\infty} dx\ \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\ (a \neq b).$$

Solution: *1er cas.* On a successivement

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2} &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\ \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2} \\
&= \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}} dx\ \mathcal{F}_x^{\pm}\chi_{[-a,a]}\ \mathcal{F}_x^{\mp}\chi_{[-b,b]} \\
&= \frac{\pi}{4}\int_{\mathbb{R}} dx\ \chi_{[-a,a]}(x)\ \chi_{[-b,b]}(x) \\
&= \frac{\pi}{2}\inf\{a,b\}.
\end{aligned}$$

2ème cas. On a

$$2\sin(ax)\cos(bx) = \sin((a+b)x) + \sin((a-b)x).$$

Dès lors

$$\int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } a > b \\ 0 & \text{si } a < b \\ \pi/4 & \text{si } a = b. \end{cases}$$

3 ème cas. Si $B > A > 0$ et si $\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\beta} dx\ \frac{\cos(Ax)-\cos(Bx)}{x} &= \int_0^{\beta} dx\ \int_A^B dy\ \sin(xy) \\
&= \int_A^B dy\ \frac{1-\cos(\beta y)}{y} \\
&= \ln(\frac{B}{A}) - \int_A^B dy\ \frac{\cos(\beta y)}{y}.
\end{aligned}$$

Comme $1/y$ est intégrable sur $[A,B]$, le théorème de Riemann-Lebesgue donne

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_A^B dy\ \frac{\cos(\beta y)}{y} = \lim_{\beta\to+\infty}\mathcal{R}\mathcal{F}^{+}_{y\to\beta}\frac{1}{y}\chi_{[A,B]}(y) = 0.$$

D'où, pour tous réels non nuls A, B

$$\int_0^{\rightarrow+\infty} dx\ \frac{\cos(Ax)-\cos(Bx)}{x} = \ln(\frac{|B|}{|A|}).$$

Il s'ensuit que pour tous $a, b > 0$, $a \neq b$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\rightarrow+\infty} dx\ \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x} &= \frac{-1}{2}\int_0^{\rightarrow+\infty} dx\ \frac{\cos((a+b)x)-\cos((a-b)x)}{x} \\
&= \frac{1}{2}\ln(\frac{a+b}{|a-b|}).
\end{aligned}$$

□

Exercice 6.14 Calculer $I = \int_{\to 0}^{1} [\sin x + \sin(1/x)]/x \, dx$.

(*Suggestion:* Soit $r_m \to 0^+$. On a d'une part $\int_{r_m}^{1} \frac{\sin x}{x} \, dx \to \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$. D'autre part, par le changement de variables $y = x^{-1}$, on a

$$\int_{r_m}^{1} \frac{\sin(1/x)}{x} \, dx \to \int_1^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Il s'ensuit que I existe et vaut $\pi/2$.)

Exercice 6.15 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x / \left[x(1+x^2)\right] dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

(*Suggestion:* Calculer la transformée de Fourier en cosinus des fonctions $\chi_{]0,1[}$ et e^{-x} et appliquer la formule de Parseval.)

Exercice 6.16 De la formule de Parseval, déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab} \frac{1}{a+b} \ ; \ a, b > 0.$$

Solution: On a

$$\mathcal{F}^{\pm} e^{-k|x|} = \frac{2k}{k^2 + y^2} \text{ si } k > 0.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \mathcal{F}^{\pm}_{y \to x}\left(\frac{e^{-a|y|}}{2a}\right)$$

et

$$\frac{1}{x^2+b^2} = \mathcal{F}^{\pm}_{y \to x}\left(\frac{e^{-b|y|}}{2b}\right).$$

Comme $e^{-a|x|}/2a \in \mathrm{L}^1$ et que $1/(x^2+a^2) \in \mathrm{L}^1$, la formule de Parseval montre que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-a|y|}}{2a} \frac{e^{-b|y|}}{2b} \, dy \\
&= 2\pi \frac{2}{4ab} \int_0^{+\infty} e^{-(a+b)y} dy \\
&= \frac{4\pi}{4ab} \left.\frac{-e^{-(a+b)y}}{a+b}\right|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{ab(a+b)}
\end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Exercice 6.17 [*Intégrales de Fresnel*]

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \quad ; \quad \lambda > 0.$$

Solution: Si $x > 0$, l'intégrale de Poisson montre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt.$$

Il en résulte que

$$\int_0^m \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^m \cos \lambda x (\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt) dx.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^m \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{x}} dx \\
&= \Re \left[\int_0^m dx \int_0^{+\infty} dt \; e^{(i\lambda - t^2)x} \right] \\
&= \Re \left[\int_0^{+\infty} dt \int_0^m dx \; e^{(i\lambda - t^2)x} \right] \\
&= \Re \left[\int_0^{+\infty} dt \left[\frac{e^{(i\lambda - t^2)x}}{i\lambda - t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_m^{+\infty} e^{(i\lambda - t^2)x} dx \right] \right] \\
&= \int_0^{+\infty} dt \left[\frac{t^2}{t^4 + \lambda^2} - \int_m^{+\infty} \cos \lambda x e^{-t^2 x} dx \right] \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + \lambda^2} dt - \int_0^{+\infty} dt \int_m^{+\infty} e^{-t^2 x} \cos \lambda x \; dx.
\end{aligned}$$

Pour $t \in]0, +\infty[$ fixé, $e^{-t^2 x} \downarrow 0$ sur $]0, +\infty[$ donc

$$\left| \int_m^{+\infty} dx \; e^{-t^2 x} \cos \lambda x \right| \le \frac{2}{\lambda} e^{-t^2 m}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{+\infty} dt \int_m^{+\infty} e^{-t^2 x} \cos \lambda x \, dx\right| \\
&\leq \quad \int_0^{+\infty} dt \frac{2}{\lambda} e^{-t^2 m} \\
&\leq \quad \frac{2}{\lambda}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}} \to 0 \quad , m \to +\infty.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\to+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+\lambda^2} dt = I.$$

Posons

$$x = \frac{\lambda^2}{t^4+\lambda^2},$$

on a $xt^4 + x\lambda^2 = \lambda^2$ d'où

$$t^4 = \lambda^2(1-x)x^{-1}$$

et

$$t = \sqrt{\lambda}(1-x)^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}}$$

d'où

$$\begin{aligned}
D_x t &= \sqrt{\lambda}\frac{1}{4}(\frac{1}{x}-1)^{-\frac{3}{4}}\frac{-1}{x^2} \\
&= -\frac{\sqrt{\lambda}}{4}(1-x)^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{5}{4}}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \lambda(1-x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-2} x \frac{\sqrt{\lambda}}{4}(1-x)^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{5}{4}} dx \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{3}{4}} dx \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \mathrm{B}(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2\lambda}}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité provenant de la formule d'Euler. Finalement, on a

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}.$$

□

Exercice 6.18 i) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\ dx.$$

ii) Soient $a, \lambda > 0$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 \sin(\lambda x)\ dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 \cos(\lambda x)\ dx.$$

Solution: i) En intégrant par parties, on obtient

$$I = \left[\frac{-\sin^4 x}{x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\to+\infty} \frac{4\sin^3 x \cos x}{x} dx.$$

Comme on a

$$\sin^3 x \cos x = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x$$

on obtient $I = \pi/4$ car $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

ii) *Cas du sinus*

On a $1/x^2 = -D_x(1/x)$; une intégration par parties donne alors

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 \sin(\lambda x)\ dx = \int_0^{\to+\infty} dx\ \frac{\lambda \sin^2(ax)\cos(\lambda x) + a\sin(\lambda x)\sin(2ax)}{x}.$$

On a encore

$$\begin{aligned}
\sin^2(ax)\cos(\lambda x) &= \cos(\lambda x)\frac{1-\cos(2ax)}{2} \\
&= (1/2)\cos(\lambda x) - (1/4)\left(\cos((2a+\lambda)x) + \cos((2a-\lambda)x)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos(\lambda x) - \cos((2a+\lambda)x) + \cos(\lambda x) - \cos((2a-\lambda)x)\right)
\end{aligned}$$

et

$$\sin(\lambda x)\sin(2ax) = -(1/2)\left(\cos((2a+\lambda)x) - \cos((2a-\lambda)x)\right).$$

En se rappelant que, si $A, B > 0$, on a

$$\int_0^{\to+\infty} dx\ \frac{\cos(Ax) - \cos(Bx)}{x} = \ln(\frac{B}{A})$$

on obtient, si $2a \neq \lambda$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 \sin(\lambda x)\,dx &= \frac{\lambda}{4}\left(\ln\frac{\lambda+2a}{\lambda} + \ln\frac{|\lambda-2a|}{\lambda}\right) - \frac{a}{2}\ln\frac{|\lambda-2a|}{2a+\lambda} \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{(\lambda+2a)^{\lambda+2a}|2a-\lambda|^{\lambda-2a}}{\lambda^{2\lambda}}.
\end{aligned}$$

Si $\lambda = 2a$, on a (la troisième ligne étant obtenue par une intégration par parties)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 \sin(\lambda x)\,dx &= \int_0^{+\infty} dx\, \frac{\cos(ax)\sin(ax)(1-\cos(2ax))}{x^2} \\
&= \int_0^{+\infty} dx\, \frac{(1/2)\sin(2ax) - (1/4)\sin(4ax)}{x^2} \\
&= \int_0^{\to+\infty} dx\, \frac{\cos(2ax)-\cos(4ax)}{x} \\
&= \ln\frac{4a}{2a} \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

Cas du cosinus

Vu la parité de l'intégrand, on a

$$\int_0^{+\infty} dx\, \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 \cos(\lambda x) = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{\pm}_{x\to\lambda}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2.$$

Or on a

$$\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 = \frac{a}{2}\mathcal{F}^{+}_{y\to x}\left((1-|y|/(2a))\chi_{[-2a,2a]}(y)\right).$$

Comme la fonction $F(y) := (1-|y|/(2a))\chi_{[-2a,2a]}(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Fourier donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} dx\, \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 \cos(\lambda x) &= \frac{a}{4}\mathcal{F}^{-}_{x\to\lambda}\mathcal{F}^{+}_{y\to x}F(y) \\
&= \frac{a\pi}{2}F(\lambda) \\
&= \begin{cases} \frac{a\pi}{2}(1-\lambda/(2a)) & \text{si } \lambda \leq 2a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Exercice 6.19 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\, dx.$$

Solution: Comme la fonction $(\cos(ax) - \cos(bx))/x^2$ est continue sur $]0, +\infty[$, admet une limite finie en 0 et est de module majoré par $2x^{-2}$, elle est intégrable sur $]0, +\infty[$.

En utilisant le fait que $x^{-2} = -D_x x^{-1}$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} dx\, \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} &= \int_0^{\to+\infty} dx\, \frac{b\sin(bx) - a\sin(ax)}{x} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(|b| - |a|\right).\end{aligned}$$

□

Exercice 6.20 Soient $a, b > 0$. Montrer que

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\cos(ax) - e^{-bx}}{x}\, dx = \ln(\frac{b}{a}).$$

Solution: La fonction $f(x) = \frac{\cos(ax)-e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, admet une limite finie en 0; la fonction e^{-bx}/x est intégrable en $+\infty$ et $\cos(ax)/x$ admet une intégrale fléchée en $+\infty$. Au total, la question posée a un sens.

Cela étant, en transformant $1/x$ en une intégrale puis en permutant l'ordre d'intégration (la fonction $|\cos(ax) - e^{-bx}|e^{-xy}$ est en effet intégrable en x, y sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ comme on le voit en intégrant par rapport à y puis par rapport à x), on a

$$\begin{aligned}I(\beta) &= \int_0^{\beta} \frac{\cos(ax) - e^{-bx}}{x} \\ &= \int_0^{\beta} \cos(ax) - e^{-bx} \int_0^{+\infty} dy\; e^{-xy} \\ &= \int_0^{+\infty} dy\; \left(\frac{y}{y^2+a^2} - \frac{1}{b+y} + \frac{e^{-(b+y)\beta}}{b+y} + e^{-y\beta}\frac{a\sin(a\beta) - y\cos(a\beta)}{y^2+a^2}\right).\end{aligned}$$

La somme des deux premiers termes de l'intégrand constitue une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ d'intégrale égale à $\ln(b/a)$ (intégration par variation de primitive). L'intégrale de la somme des deux autres termes converge vers 0 quand $\beta \to +\infty$ par application du théorème de Lebesgue. □

Exercice 6.21 Si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (resp.$\mathrm{C}^0(\mathbb{R})$) est une fonction périodique de période 1, montrer que

$$S_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=-k}^{k}(\int_0^1 f(y)e^{-i2\pi jy}dy)e^{i2\pi jx}$$

converge dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{C}^0(\mathbb{R})$) vers f.

Solution: On a successivement :

$$\begin{aligned}
&(\int_0^1 f(y)e^{-i2\pi my}dy)e^{i2\pi mx} \\
&= \int_0^1 e^{i2\pi m(x-y)}f(y)dy \\
&= \int_{x-1}^{x} e^{i2\pi mz}f(x-z)dz \ \ \text{(chgt.var. } z = x-y) \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi mz}f(x-z)dz \ \ \text{(périodicité).}
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$S_m(x) = \int_{-1/2}^{1/2}(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=-k}^{k}e^{i2\pi jz})f(x-z)dz.$$

Or

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=-k}^{k}e^{i2\pi jz} = \frac{1}{m}(\frac{\sin(\pi mz)}{\sin \pi z})^2$$

donc

$$S_m = \rho_m * f$$

si l'on pose

$$\rho_m(z) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=-k}^{k}e^{i2\pi jz}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(z) = \frac{1}{m}(\frac{\sin(\pi mz)}{\sin \pi z})^2\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(z).$$

Ainsi, d'une part,

$$\int \rho_m(z)dz = 1$$

et d'autre part,

$$\int_{|z|>R}\rho_m(z)dz = \int_{\frac{1}{2}>|z|>R}\frac{1}{m}(\frac{\sin(\pi mz)}{\sin \pi z})^2 dz.$$

Cette relation montre que

$$\begin{aligned}
\int_{|z|>R}\rho_m(z)dz &= \int_{\frac{1}{2}>|z|>R}\frac{1}{m}(\frac{\sin(\pi m z)}{\pi z})^2(\frac{\pi z}{\sin\pi z})^2 dz \\
&\leq C\int_{\frac{1}{2}>|z|>R}\frac{1}{m}(\frac{\sin(\pi m z)}{\pi z})^2 dz \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}m>|u|>Rm}(\frac{\sin\pi u}{\pi u})^2 dz.
\end{aligned}$$

L'intégrabilité de

$$(\frac{\sin\pi u}{\pi u})^2$$

montre alors que

$$\int_{|z|>R}\rho_m(z)dz \to 0$$

ce qui achève de montrer que ρ_m est une unité approchée de convolution dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ et dans C_0. La conclusion est alors immédiate. $\square$

Exercice 6.22 [*Formule de S.D. Poisson*]

Montrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}^{\pm}_{2\pi m}f$$

si

- $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{I\!R})\cap\mathrm{L}^1(\mathrm{I\!R})$,
- $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m)$ converge absolument et uniformément sur $[0,1]$,
- $\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}^{\pm}_{2\pi m}f$ converge absolument.

Solution: Vu les hypothèses, il est clair que $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m)$ est une fonction périodique de période 1 continue.

L'exercice précédent montre alors que

$$F(x) = \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=-k}^{k}(\int_0^1 F(y)e^{\mp i2\pi jy}dy)e^{\pm i2\pi jx}$$

pour tout x. Ainsi

$$F(0) = \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=-k}^{k}\int_0^1 F(y)e^{\mp i2\pi jy}dy.$$

Or il est clair que

$$\int_0^1 F(y)e^{\mp i2\pi jy}dy = \lim_{l\to+\infty}\int_0^1 (\sum_{r=-l}^{l} f(y+r))e^{\mp i2\pi jy}dy$$

donc, on a successivement, en tenant compte de l'intégrabilité de f,

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(y)e^{-i2\pi jy}dy &= \lim_{l\to+\infty}\sum_{r=-l}^{l}\int_r^{1+r} f(y)e^{\mp i2\pi jy}dy\\ &= \lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l+1} f(y)e^{\mp i2\pi jy}dy\\ &= \mathcal{F}_{2\pi j}^{\mp} f.\end{aligned}$$

La conclusion résulte alors du théorème de Cesaro et de la dernière hypothèse. □

Exercice 6.23 Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = te^{-at^2}\sin(bt).$$

Exercice 6.24 Soit φ une fonction de $D(\mathbb{R})$ à valeurs entre 0 et 1 et égale à 1 au voisinage de 0. Montrer que $\mathcal{F}_{x\to t}^{\pm}|x|\varphi(x) est intégrable sur \mathbb{R}.$

Exercice 6.25 Soit φ une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ non identiquement nulle. Montrer que la transformée de Fourier d'une telle fonction n'est pas un élément de $D(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 6.26 [*Equation de la Chaleur*]

Considérons une barre mince infinie de métal de conductivité constante γ et de chaleur spécifique volumique constante C.

Si $U(x,t)$ désigne la température en x au temps t, on a

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\gamma}{C}\,\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}}$$

En effet, si B désigne la portion de la barre comprise entre x et $x+\Delta x$, la quantité de chaleur reçue entre t et $t+\Delta t$ est égale à

$$\Delta t(\gamma\frac{\partial U}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \gamma\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)).$$

Cette quantité de chaleur doit être égale à

$$(U(x,t+\Delta t) - U(x,t))C\Delta x.$$

On a donc

$$\frac{\gamma}{\Delta x}(\frac{\partial U}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial U}{\partial x}(x,t)) = \frac{C}{\Delta t}(U(x,t+\Delta t) - U(x,t))$$

d'où par passage à la limite pour $\Delta x, \Delta t$ tendant vers 0, on voit que

$$\gamma\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = C\,\frac{\partial U}{\partial t}$$

comme annoncé.

On demande de résoudre cette équation par transformation de Fourier en x, si l'on impose la condition initiale (où la convergence est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$)

$$\lim_{t\to 0} U(x,t) = f(x)$$

et des conditions appropriées à U.

Solution:

a) ANALYSE — Nous allons chercher une solution U telle que les fonctions

$$U(x,t), \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}(x,t), \frac{\partial U}{\partial x}(x,t), \frac{\partial U}{\partial t}(x,t) \tag{6.1}$$

soient continues en (x,t) dans $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$ et intégrables en x sur $\mathbb{R}$ pour tout t fixé dans $]0,+\infty[$. Nous supposerons également que pour tout intervalle compact $[t_0,t_1]$ de $]0,+\infty[$, il existe $F(x)$ intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$t\in[t_0,t_1] \Rightarrow \left|\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\right| \le F(x) \tag{6.2}$$

De plus, nous imposerons à U la condition initiale

$$\lim_{t\to 0} U(x,t) = f(x) \tag{6.3}$$

où la limite est à considérer dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Une telle solution admet pour t fixé une transformée de Fourier $\hat{U}(\xi,t) = \mathcal{F}^+_\xi U(x,t)$. Comme on a d'une part

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = \frac{\gamma}{C}\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}(x,t) \tag{6.4}$$

et comme $\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}(x,t)$ sont intégrables en x, pour t fixé, il vient :

$$\mathcal{F}^+_\xi(\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)) = \frac{\gamma}{C}(-i\xi)^2\mathcal{F}^+_\xi U(x,t). \tag{6.5}$$

D'autre part,

$$\hat{U}(\xi,t) = \mathcal{F}^+_\xi U(x,t) = \int e^{i\xi x} U(x,t)dx$$

et le théorème de dérivation des intégrales paramétriques montre que $\hat{U}(x,t)$ est continûment dérivable par rapport à t sur $]0,+\infty[$ pour x fixé et que

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}(\xi,t) = \mathcal{F}^+_\xi(\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)),$$

l'équation 6.5 devient alors

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}(\xi,t) = -\frac{\gamma}{C}\xi^2\hat{U}(\xi,t).$$

La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants montre alors que pour tout ξ fixé, il existe une constante $C(\xi)$ telle que

$$\hat{U}(\xi,t) = C(\xi)e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}. \tag{6.6}$$

Comme la transformation de Fourier est un opérateur linéaire continu de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, la condition initiale 6.3 montre que

$$\lim_{t\to 0^+}\hat{U}(\xi,t) = \mathcal{F}^+_\xi f(x),$$

la limite étant à considérer dans L^∞. Mais les fonctions $\hat{U}(\xi,t)$ et $\mathcal{F}^+_\xi f$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc

$$\hat{U}(\xi,t) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \mathcal{F}^+_\xi f$$

si $t \to 0^+$. Or, pour tout ξ fixé, $\hat{U}(\xi,t) \to C(\xi)$ si $t \to 0^+$ donc $C(\xi) = \mathcal{F}_\xi^+ f$. L'équation 6.6 montre alors que

$$\hat{U}(\xi,t) = (\mathcal{F}_\xi^+ f)e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}.$$

La fonction $\mathcal{F}_\xi^+ f$ est continue et bornée car $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ donc

$$(\mathcal{F}_\xi^+ f)e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

pour tout t fixé. Le théorème de Fourier montre alors que

$$(2\pi)U(y,t) = \mathcal{F}_y^- \left[(\mathcal{F}_\xi^+ f)e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}\right].$$

De cette équation, on déduit que

$$\begin{aligned}(2\pi)U(y,t) &= \int e^{-i\xi y}(\int e^{i\xi x} f(x)dx)e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}d\xi \\ (2\pi)U(y,t) &= \int d\xi \int dx f(x)e^{-i\xi(y-x)}e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Or, on dispose de la majoration

$$\left|f(x)e^{-i\xi(y-x)}e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}\right| \leq |f(x)|\, e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}$$

où le second membre est intégrable en (x,ξ). Dès lors, on peut permuter l'ordre d'intégration dans 6.7 (Fubini), ce qui donne la relation :

$$\begin{aligned} U(y,t) &= \int f(x)\left[\int e^{-i\xi(y-x)\xi}\frac{e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}}{2\pi}d\xi\right]dx \\ &= \left[f * \mathcal{F}^-(\frac{e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}}{2\pi})\right]_y \end{aligned} \tag{6.8}$$

On sait par l'exercice (6.2) que

$$\mathcal{F}_y^-(e^{-kx^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{-\frac{y^2}{4k}}.$$

Il en résulte que

$$\mathcal{F}_x^-(\frac{e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}}{2\pi}) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi C}{\gamma t}}e^{-\frac{Cx^2}{4\gamma t}}.$$

Nous avons vu que la gaussienne d'écart type σ est la fonction

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

il en résulte que

$$\mathcal{F}_x^-\left(\frac{e^{-\frac{\gamma}{C}\xi^2 t}}{2\pi}\right) = G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x);$$

ainsi, l'équation 6.8 devient

$$U(x,t) = (f * G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}})_x,$$

ce qui achève l'analyse de notre problème.

b) SYNTHESE — La fonction $G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x)$ est de classe C_∞ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$; de plus :

$$\begin{aligned}
D_t G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{C}{2\gamma}}\left[D_t(t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{Cx^2}{4\gamma t}})\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{C}{2\gamma}}\left[-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{Cx^2}{4\gamma t}} + t^{-\frac{1}{2}}\,\frac{Cx^2}{4\gamma t^2}e^{-\frac{Cx^2}{4\gamma t^2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{C}{2\gamma t}}\left[\frac{-1}{2t} + \frac{Cx^2}{4\gamma t^2}\right]e^{-C\frac{x^2}{4\gamma t}} \\
&= \frac{Cx^2 - 2\gamma t}{4\gamma t^2}G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x) \\
D_x G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x) &= \frac{-Cx}{2\gamma t}G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x) \\
D_x^2 G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x) &= \frac{-C}{2\gamma t}G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x) - \frac{Cx}{2\gamma t}\left(\frac{-Cx}{2\gamma t}\right)G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x) \\
&= \frac{C(Cx^2 - 2\gamma t)}{4\gamma^2 t^2}G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x).
\end{aligned}$$

De ces relations et du théorème de dérivation des intégrales paramétriques, il résulte que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction

$$U(x,t) = (f * G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}})_x$$

vérifie les hypothèses (6.1) et (6.2) et que

$$D_x^2 U(x,t) = \left(f * \left(\frac{C}{\gamma}\,\frac{C\cdot^2 - 2\gamma t}{4\gamma t^2}\,G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(\cdot)\right)\right)_x$$

$$D_t U(x,t) = \left(f * \left(\frac{C\cdot^2 - 2\gamma t}{4\gamma t^2}\,G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(\cdot)\right)\right)_x.$$

La fonction $U(x,t)$ est donc bien une solution de l'équation de la chaleur. En ce qui concerne la condition initiale (6.3), remarquer d'abord que pour tout $R > 0$,

$$\lim_{\sigma\to 0} \int_{|x|\geq R} G_\sigma(x)dx = 0.$$

En effet,

$$\int_{|x|\geq R} G_\sigma(x)dx = \int_{|x|\geq R} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

et en posant $x = \sigma y$, il vient :

$$\int_{|x|\geq R} G_\sigma(x)dx = \int_{|y|\geq \frac{R}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

et la conclusion résulte directement du théorème de Lebesgue appliqué aux suites

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \chi_{\{y:|y|\geq \frac{R}{\sigma_m}\}}$$

où $\sigma_m \to 0^+$.

Il suffit d'appliquer, à présent, le théorème sur les unités approchées de convolution (Cours, p. II.26) aux suites $G_{\sigma_m}, \sigma_m \to 0^+$ pour montrer que

$$f * G_\sigma \underset{\mathrm{L}^1}{\to} f$$

si $\sigma \to 0^+$. Par conséquent,

$$U(x,t) \underset{\mathrm{L}^1}{\to} f(x)$$

si $t \to 0^+$ et la condition limite (6.3) est satisfaite.

On peut s'assurer que pour tous $\alpha, \beta \geq 0$, il existe un polynôme $P_{\alpha,\beta}(x,t)$ tel que

$$D_x^\alpha D_t^\beta G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x) = \frac{P_{\alpha,\beta}(x,t)}{t^{\alpha+2\beta}} G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x).$$

Pour tout compact K de $]0,+\infty[$, il existe donc une constante C_K telle que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times K} \left| D_x^\alpha D_t^\beta G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}} \right| \leq C_k.$$

Cela montre que la solution

$$U(x,t) = (f * G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}})_x$$

est en fait de classe C_∞ sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$.

En guise de conclusion, donnons le graphe de la fonction

$$(t,x) \mapsto G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}(x),$$

solution élémentaire de l'équation de la chaleur.

$\square$

Chapitre 7

Transformation de Laplace dans L^1

Exercice 7.1 Etablir les formules suivantes (transformées unilatérales):

a) $\mathcal{L}_p(x^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$; si $\alpha > -1,\ p > 0$

b) $\mathcal{L}_p(\frac{x^m}{m!}\ e^{\alpha x}) = \frac{1}{(p-\alpha)^{m+1}}$; si $\alpha \in \mathbb{R}, p > \alpha, m \in \mathbb{N}$

c) $\mathcal{L}_p(\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}}) = \frac{1}{\sqrt{p+a}}$; si $a > 0, p > 0$

d) $\mathcal{L}_p(\frac{e^{-a/x}}{\sqrt{x}}) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-2\sqrt{ap}}$; si $a > 0, p > 0$

e) $\mathcal{L}_p(\frac{1}{\sqrt{x}}\cos a\sqrt{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-\frac{a^2}{4p}}$; si $a > 0, p > 0$.

Solution: a) On a

$$\mathcal{L}_p(x^\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-px}x^\alpha dx.$$

Posons $px = u$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(x^\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{-u}(\frac{u}{p})^\alpha \frac{du}{p} \\ &= p^{-\alpha-1}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^\alpha du \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

b) Utiliser a) et les propriétés de la transformée de Laplace.

c) On a

$$I = \mathcal{L}_p(\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}} e^{-px} dx.$$

Posons $x = y^2$. Il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay^2}}{\sqrt{\pi y^2}} e^{-py^2} 2y dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)y^2} dy \\ &= \frac{2}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a+p}} = \frac{1}{\sqrt{p+a}} \quad \text{par Poisson.} \end{aligned}$$

d) Par définition, on a

$$\mathcal{L}_p(\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{\sqrt{x}}) = \int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Posons $x = y^2$. Il vient

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} e^{-py^2} e^{-a/y^2} \frac{2y}{y} dy. \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-(py^2 + a/y^2)} dy = 2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{pa}}, \end{aligned}$$

car on dispose de la formule

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + b/x^2)} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

e) On sait que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \; dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

si $a, b > 0$. Il en résulte que si

$$I = \mathcal{L}_p(\frac{1}{\sqrt{x}} \cos a\sqrt{x}),$$

on a

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos a\sqrt{x} \; dx.$$

Posons $x = y^2$, il vient

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-py^2}\cos ay\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\; e^{-a^2/4p}.$$

□

Exercice 7.2 a) Soit $f \in L^1(]0,+\infty[)$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}_p(xf(x))\; dp \;=\; \int_0^{+\infty} f(x)\; dx.$$

b) Soient $f \in L^1(]0,+\infty[)$ et $p > 0$. Montrer que

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{L}_y(f)) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{p+x}\; dx.$$

Remarque : Les transformations de Laplace sont des transformations unilatérales.

Solution: a) La fonction $e^{-px}x|f(x)|$ étant intégrable sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ comme on le voit en intégrant d'abord par rapport à p, la formule demandée résulte d'une simple permutation d'intégrales.

b) Pour $p > 0$, considérons la fonction $F(x,y) = f(x)e^{-py}e^{-xy}$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Comme $|F(x,y)| \leq |f(x)|e^{-py}$ et comme $|f(x)| \in L^1(]0,+\infty[)$, $e^{-py} \in L^1(]0,+\infty[)$, la fontion $F(x,y)$ est intégrable sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Il s'ensuit que, par permutation des intégrales :

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{L}_y f) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy\; f(x)e^{-py}e^{-xy} = \int_0^{+\infty} dx\; \frac{f(x)}{p+x}.$$

□

Exercice 7.3 Calculer la transformée de Laplace unilatérale en $p > 0$ de la fonction $f(x) = (\cos(ax) - \cos(bx))/x$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Solution: Par exemple, en exprimant la différence des cosinus comme une intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} dx\; \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-px} \;&=\; \int_0^{+\infty} dx\; e^{-px}\int_a^b dy\;\; \sin(xy)\\ &=\; \int_a^b dy\; \int_0^{+\infty} dx\; e^{-px}\sin(xy)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b dy\ \frac{y}{p^2+y^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}.
\end{aligned}
$$

Les calculs sont justifiés par le fait que la fonction $f(x,y) := e^{-px}\sin(xy)$ est intégrable sur $]0,+\infty[\,\times I$ où I est l'intervalle borné d'extrémités a et b car on a $|f(x,y)| \le e^{-px}$ et la fonction e^{-px} est intégrable sur $]0,+\infty[\,\times I$. □

Exercice 7.4 Soit $a > 0$. Calculer les transformées de Laplace unilatérales en $p > 0$ de $f(x) = |\cos(ax)|$ et $g(x) = |\sin(ax)|$.

Solution: Comme les fonctions (de x) $|\cos(ax)|$ et $|\sin(ax)|$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ et π/a-périodiques, on a

$$I_c := \int_0^{+\infty} e^{-px}|\cos(ax)|\ dx = \frac{1}{1-e^{-p\pi/a}}\int_0^{\pi/a} dx\ e^{-px}|\cos(ax)|$$

et

$$I_s := \int_0^{+\infty} e^{-px}|\sin(ax)|\ dx = \frac{1}{1-e^{-p\pi/a}}\int_0^{\pi/a} dx\ e^{-px}|\sin(ax)|.$$

Cela étant, pour I_c, on a successivement

$$
\begin{aligned}
I_c &= \frac{1}{1-e^{-p\pi/a}}\left(\int_0^{\pi/(2a)} dx\ e^{-px}\cos(ax) - \int_{\pi/(2a)}^{\pi/a} dx\ e^{-px}\cos(ax)\right) \\
&= \frac{p + ae^{-p\pi/(2a)} - pe^{-p\pi/a} + ae^{-p\pi/(2a)}}{(1-e^{-p\pi/(2a)})(p^2+a^2)} \\
&= \frac{p}{p^2+a^2} + \frac{1}{(p^2+a^2)\sinh(p\pi/(2a))}.
\end{aligned}
$$

Et pour I_s, on a

$$
\begin{aligned}
I_s &= \frac{1}{1-e^{-p\pi/a}}\int_0^{\pi/a} dx\ e^{-px}\sin(ax) \\
&= \frac{a}{p^2+a^2}\,\frac{1+e^{-p\pi/a}}{1-e^{-p\pi/a}} \\
&= \frac{a}{p^2+a^2}\,\frac{e^{p\pi/(2a)}+e^{-p\pi/(2a)}}{e^{p\pi/(2a)}-e^{-p\pi/(2a)}} \\
&= \frac{a}{p^2+a^2}\coth\frac{p\pi}{2a}.
\end{aligned}
$$

□

Exercice 7.5 Montrer que

$$\mathcal{L}_p(\frac{\sin x}{x}) = \arctan(\frac{1}{p}) \ , \ p > 0.$$

Solution: La fonction $\frac{\sin x}{x}$ étant bornée pp, $e^{-px}\frac{\sin x}{x}$ est intégrable si $p > 0$ et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin x}{x}dx &= \int_0^{+\infty} dx e^{-px}\sin x \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt \\ &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dt(e^{-px}\sin x e^{-tx}).\end{aligned}$$

Il est clair que

$$e^{-px}\left|\sin x\right| e^{-tx}$$

est intégrable en t pour presque tout $x > 0$ et que

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-px}\left|\sin x\right| e^{-tx} = e^{-px}\frac{\left|\sin x\right|}{x}$$

est intégrable en x. Le théorème de Tonelli montre donc que

$$e^{-px}\sin x e^{-tx}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p(\frac{\sin x}{x}) &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} \sin x e^{-(p+t)x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} dt \Im\left[\int_0^{+\infty} e^{-(p+t-i)x}dx\right] \\ &= \int_0^{+\infty} dt \Im\left[\frac{e^{-(p+t-i)x}}{-(p+t-i)}\bigg|_0^{+\infty}\right] \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(p+t)^2+1}dt \\ &= \arctan(p+t)|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan p \\ &= \arctan(\frac{1}{p}).\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Exercice 7.6 Etablir les relations ci-dessous :

a) $\mathcal{L}_p(\frac{\mathrm{ch}(a\sqrt{x})}{\sqrt{x}}) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{\frac{a^2}{4p}}$; $a \in \mathbb{R}, p > 0$.

b) $\mathcal{L}_p(\int_0^x \frac{\sin y}{y}dy) = \frac{1}{p}\arctan(\frac{1}{p})$; $p > 0$.

c) $\mathcal{L}_p(\int_x^{\rightarrow+\infty} \frac{\cos y}{y}dy) = \frac{1}{2p}\ln(1+p^2)$; $p > 0$.

d) $\mathcal{L}_p(\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}) = \ln(\frac{p-b}{p-a})$; $p > a, p > b$.

e) $\mathcal{L}_p(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}dy) = \frac{1}{p}\ln(1+p)$; $p > 0$.

Solution: a) Par le changement de variables $x = y^2$, il vient

$$\begin{aligned} I = \mathcal{L}_p(\frac{\mathrm{ch}(a\sqrt{x})}{\sqrt{x}}) &= \int_0^{+\infty} e^{-py^2}2\mathrm{ch}(ay)dy \\ &= \int_0^{+\infty} \left[e^{ay-py^2} + e^{-ay-py^2}\right]dy. \end{aligned}$$

Or, on dispose des formules

$$py^2 - ay = (\sqrt{p}y - \frac{a}{2\sqrt{p}})^2 - \frac{a^2}{4p}$$

$$py^2 + ay = (\sqrt{p}y + \frac{a}{2\sqrt{p}})^2 - \frac{a^2}{4p}.$$

Par changement de variables, on en tire que

$$I = \frac{1}{\sqrt{p}}e^{a^2/4p}(\int_{-a/2\sqrt{p}}^{+\infty} e^{-t^2}dt + \int_{a/2\sqrt{p}}^{+\infty} e^{-t^2}dt).$$

D'où la conclusion par Poisson.

b) On sait par un exercice précédent que

$$\mathcal{L}_p(\frac{\sin x}{x}) = \arctan(\frac{1}{p}) \ ; \ p > 0.$$

Or $\frac{\sin x}{x}$ est continu, donc

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{y}dy$$

est de classe $\mathrm{C}^1 \cap \mathrm{L}^1$ à dérivée transformable par Laplace pour $p > 0$ et

$$\mathcal{L}_p(Df) = -f(0) + p\mathcal{L}_p(f)$$

d'où la conclusion.

c) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons

$$I_m = \int_0^{+\infty} dx\, e^{-px} \int_x^m dy \cos y / y$$

et calculons cette intégrale. On a

$$I_m = \int_0^m dx e^{-px} \int_x^m dy \frac{\cos y}{y} - \int_m^{+\infty} dx e^{-px} \int_m^x dy \frac{\cos y}{y}.$$

Après vérification de l'intégrabilité par rapport aux deux variables et permutation de l'ordre d'intégration, on obtient

$$I_m = \int_0^m dy \int_0^y dx e^{-px} \frac{\cos y}{y} - \int_m^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} dx e^{-px} \frac{\cos y}{y}.$$

Le calcul fournit alors l'égalité

$$I_m = p^{-1} L_m - p^{-1} J_m, \tag{7.1}$$

où on a posé

$$L_m = \int_0^m dy (\frac{\cos y}{y})(1 - e^{-py}) \quad \text{et} \quad J_m = \int_m^{+\infty} dy e^{-py} \frac{\cos y}{y}.$$

Une application directe du théorème de Lebesgue entraîne $J_m \to 0$. Calculons alors L_m.

En exprimant que $y^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-yt} dt$ pour tout $y > 0$ et en permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$L_m = \int_0^{+\infty} dt \Re \int_0^m dy (e^{(i-t)y} - e^{(i-t-p)y}),$$

ce qui, après calcul, donne

$$L_m = \int_0^{+\infty} dt 2^{-1} (D_t \ln(1+t^2) - D_t \ln\left[1 + (t+p)^2\right]) + L'_m$$

où on a posé

$$\begin{aligned} L'_m \quad = \quad & \int_0^{+\infty} dt [e^{-tm}(1+t^2)^{-1}(\sin m - t\cos m) \\ & - e^{-(t+p)m}(1 + (t+p)^2)^{-1}(\sin m - (t+p)\cos m)]. \end{aligned}$$

Comme le module de l'intégrand de L'_m est majoré par la fonction intégrable fixe

$$e^{-t}(1+t^2)^{-1}(1+t)+e^{-(t+p)}\left[1+(t+p)^2\right]^{-1}(1+t+p),$$

le théorème de Lebesgue entraîne que L'_m converge vers 0 si $m\to+\infty$. (*Variante.* On a

$$1-e^{-py}=\left[e^{-ty}\right]_p^0=\int_0^p dt\ ye^{-ty}.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} L_m &= \int_0^m dy\ \cos y\int_0^p dt\ e^{-ty}\\ &= \int_0^p dt\int_0^m dy\ \cos y e^{-ty}\\ &= \Re\int_0^p dt\int_0^{+\infty} dy\ e^{-y(t+i)}-\int_0^p dt\int_m^{+\infty} dy\ \cos y e^{-yt}\\ &= \int_0^p dt\ \frac{t}{t^2+1}-\int_0^p dt\int_m^{+\infty} dy\ \cos y e^{-yt} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left|\int_0^p dt\int_m^{+\infty} dy\ \cos y e^{-yt}\right| &\leq \int_0^p dt\left|\int_m^{+\infty} dy\ \cos y e^{-yt}\right|\\ &\leq 2\int_0^p dte^{-mt}(\text{ majoration intégrale trigonom.}) \end{aligned}$$

où le majorant tend vers 0 si $m\to+\infty$.) Par conséquent, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty} L_m=2^{-1}\ln(1+p^2).$$

Finalement, en tenant compte de 7.1, on a

$$\lim_{m\to+\infty} I_m=(2p)^{-1}\ln(1+p^2).$$

Pour conclure, il suffit maintenant d'établir que

$$\mathcal{L}_p(\int_x^{\to+\infty}\frac{\cos y}{y}dy)=\lim_{m\to\infty} I_m$$

ou encore que l'on peut appliquer le théorème de Lebesgue à la suite

$$F_m(x)=e^{-px}\int_x^m\frac{\cos y}{y}dy.$$

De fait, pour tout m, on a

$$\begin{aligned}|F_m(x)| &\leq \left|e^{-px}\int_x^1 dy\frac{\cos y}{y}\right| + \left|e^{-px}\int_1^m dy\frac{\cos y}{y}\right| \\ &\leq \left|e^{-px}\int_x^1 dy\frac{\cos y}{y}\right| + 2e^{-px}\end{aligned}$$

où la deuxième majoration est obtenue en utilisant l'inégalité des intégrales trigonométriques.

Comme la fonction majorante est intégrable sur $]0,+\infty[$, le théorème de Lebesgue peut s'appliquer et on conclut.

d)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} e^{-px} dx.$$

L'intégrand est intégrable si $p > a, p > b$. De plus, on a

$$D_{\left\{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right\}}\left(\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}e^{-px}\right) = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{xe^{ax}e^{-px}}{x} \\ \\ \dfrac{-xe^{bx}e^{-px}}{x} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} e^{(a-p)x} \\ -e^{(b-p)x} \end{array}\right\}.$$

En appliquant le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on obtient

$$D_{\left\{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right\}} I = \int_0^{+\infty} \left\{\begin{array}{c} e^{(a-p)x} \\ -e^{(b-p)x} \end{array}\right\} dx = \left\{\begin{array}{c} \left.\dfrac{e^{(a-p)x}}{a-p}\right|_0^{+\infty} \\ \\ -\left.\dfrac{e^{(b-p)x}}{b-p}\right|_0^{+\infty} \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{p-a} \\ \\ \dfrac{1}{b-p} \end{array}\right. .$$

Par primitivation, il vient

$$I = \ln(p-b) - \ln(p-a) + C.$$

Or, si $a = b$, il est clair que $I = 0$ donc $C = 0$. Ainsi,

$$I = \ln\left(\frac{p-b}{p-a}\right).$$

e)

$$I = \int_0^{+\infty} dx e^{-px} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi.$$

Inversons l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} d\xi \int_0^{\xi} dx e^{-px} \frac{e^{-\xi}}{\xi} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} \left. \frac{e^{-px}}{-p} \right|_0^{\xi} d\xi \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p\xi} - 1}{-p\xi} e^{-\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{p} \mathcal{L}_1 \left(\frac{e^{0\xi} - e^{-p\xi}}{\xi} \right)
\end{aligned}$$

et si l'on tient compte de l'exercice précédent, il vient :

$$I = \frac{1}{p} \ln \frac{1+p}{1-0} = \frac{\ln(1+p)}{p}.$$

□

Exercice 7.7 Soit la constante d'Euler

$$C = \lim_m \left(\sum_{k=1}^{m} k^{-1} - \ln(m) \right).$$

Montrer que

a) $-C = D\Gamma(1) = \mathcal{L}_1 \ln(x)$

b) $\mathcal{L}_p \ln(x) = -p^{-1}(\ln(p) + C)$ pour $p > 0$

c) $-C = \int_0^{+\infty} x^{-1} \left(e^{-x} - (1+x)^{-1} \right) \, dx$.

(Les transformations de Laplace sont des transformations unilatérales.)

Solution: a) et b) voir livre de théorie pp 171 – 173.

(Pour rappel : si $p > 0$, il vient, en posant $y = px$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-px} \ln x dx &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{p} \ln \frac{y}{p} dy \\
&= \frac{1}{p} \left[\int_0^{+\infty} e^{-y} \ln y dy - \ln p \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \right] \\
&= \frac{1}{p} \left[\int_0^{+\infty} e^{-y} \ln y dy - \ln p \right].
\end{aligned}$$

Or on a

$$D\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = -C$$

(voir cours).)

c) On sait que pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} dt\ \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Dès lors,

$$-C = \int_0^{+\infty} dx\ e^{-x} \ln x = \int_0^{+\infty} dx\ e^{-x} \int_0^{+\infty} dt\ \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}.$$

Une permutation des intégrales donne alors

$$\begin{aligned} -C &= \int_0^{+\infty} dt\ \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} dx\ \left(e^{-t}e^{-x} - e^{-xt-x}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} dt\ \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \frac{1}{t+1}\right). \end{aligned}$$

Justification pour la permutation : Tonelli-Fubini : la fonction

$$f(x,t) := e^{-x} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$$

- est continue sur $I =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$
- est intégrable en t sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 0$ et

$$\int_0^{+\infty} dt\ |f(x,t)| = e^{-x} \ln x \chi_{]1,+\infty[}(x) - e^{-x} \ln x \chi_{]0,1]}(x)$$

- la fonction $\int_0^{+\infty} dt\ |f(x,t)|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. □

Exercice 7.8 Trouver les transformées de Laplace unilatérales inverses de

$$\frac{2p}{(p+3)^2}, \quad \frac{6p}{p^2 + 4p + 13}, \quad \frac{10}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Solution: Pour $p > -3$, on a

$$\mathcal{L}_p\left(2e^{-3x} - 6xe^{-3x}\right) = \frac{2p}{(p+3)^2}.$$

Pour $p > -2$, on a

$$\mathcal{L}_p\left(6e^{-2x}\cos(3x) - 4e^{-2x}\sin(3x)\right) = \frac{6p}{p^2 + 4p + 13}.$$

Pour $p > 0$, on a

$$\mathcal{L}_p\left(2 - 2e^{-x}\cos(2x) - e^{-x}\sin(2x)\right) = \frac{10}{p(p^2+2p+5)}.$$

□

Exercice 7.9 Résoudre par Laplace le système :

$$\begin{cases} Du + v = 0 \\ Dv - u - 2v = 0. \end{cases}$$

Solution: Par la formule donnant la transformée de Laplace d'une dérivée, il vient

$$p\mathcal{L}_p(u) - u(0) + \mathcal{L}_p(v) = 0$$

$$p\mathcal{L}_p(v) - v(0) - \mathcal{L}_p(u) - 2\mathcal{L}_p(v) = 0.$$

Il faut donc résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ -1 & p-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_p(u) \\ \mathcal{L}_p(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_p(u) \\ \mathcal{L}_p(v) \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2-2p+1} \begin{pmatrix} p-2 & -1 \\ +1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(u) &= \frac{p-2}{(p-1)^2}\,u(0) - \frac{1}{(p-1)^2}\,v(0) \\ \mathcal{L}_p(v) &= \frac{1}{(p-1)^2}\,u(0) + \frac{p}{(p-1)^2}\,v(0). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{p-2}{(p-1)^2} &= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \\ \frac{p}{(p-1)^2} &= \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(e^x) &= \frac{1}{p-1} \\ \mathcal{L}_p(xe^x) &= \frac{1}{(p-1)^2}. \end{aligned}$$

D'où la solution :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - xe^x & -xe^x \\ xe^x & e^x + xe^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 7.10 Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} D^2u + u = x \\ u(0) = 1, Du(0) = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} D^2u + 2Du + u = \cos x \\ u(0) = 1, Du(0) = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} Du + Dv = -e^{-x} \\ Du + u + v = 0 \\ u(0) = 0, v(0) = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} Du - Dv = xe^x \\ Du - u - v = 0 \\ u(0) = 0, v(0) = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} D^2u + Dv = x \\ D^2v + u = e^x \\ u(0) = v(0) = Du(0) = Dv(0) = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} D^2u - Dv = 2 - 2x \\ Dv + u = x^2 + 2x + \cos x \\ u(0) = 1, Du(0) = v(0) = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} Du - Dv = x \sin x \\ D^2v + 2u + v = 0 \\ u(0) = v(0) = 0,\ Dv(0) = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} Du + u + v = 0 \\ Du + Dv - u = 0 \\ u(0) = 0, v(0) = 1 \end{cases}$

Solution:

1. $u(x) = x + \cos x + 3\sin x$.
2. $u(x) = (\sin x + (5x+2)e^{-x})/2$.
3. $u(x) = e^{-x} - 1,\ v(x) = 1$.
4. $u(x) = xe^{x};\ v(x) = e^{x}$.
5. $u(x) = -1 + (2/3)e^{x} - (x/3)e^{x} + (1/3)e^{-x/2}\cos\left[(\sqrt{3}/2)x\right]$
   $- (1/3\sqrt{3})e^{-x/2}\sin\left[(\sqrt{3}/2)x\right]$,
   $v(x) = x^2/2 - (1/3)e^{x} + (1/3)xe^{x} + (1/3)e^{-x/2}\cos\left[(\sqrt{3}/2)x\right]$
   $+ (1/3\sqrt{3})e^{-x/2}\sin\left[(\sqrt{3}/2)x\right]$.
6. $u(x) = x^2 + (1/2)x\sin x + \cos x,\ v(x) = x^2 + (1/2)x\cos x - (1/2)\sin x$.
7. $u(x) = \sin x,\ v(x) = x\cos x$.
8. $u(x) = -\sin x,\ v(x) = \cos x + \sin x$.

$\square$

Exercice 7.11 Schématisons le passage d'une voiture sur une bosse sinusoïdale par le système dynamique suivant :

où m est la masse du véhicule, k la constante du ressort, v la vitesse de déplacement, x_e la position d'équilibre. Le système est en équilibre pour $d < 0$. Notons $x(t)$ l'écart à la position d'équilibre et $x_0(t)$ la position du point d'appui p au cours du temps. Le système dynamique est donc décrit par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = k(x_0 - x) \\ x(t) = 0 \ \text{ pour } t < 0 \\ \dot{x}(t) = 0 \ \text{ pour } t < 0 \\ x_0(t) = h\sin(\frac{vt}{b}\pi)\chi_{\left[0,\frac{b}{v}\right]}(t). \end{cases}$$

Notons $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre du système et posons $\alpha = \frac{v\pi}{b}$. Les équations deviennent alors

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x_0(t) = h\sin(\alpha t)\chi_{\left[0,\frac{\pi}{\alpha}\right]}. \end{cases}$$

On demande de résoudre ce système par la transformation de Laplace unilatérale.

Solution: Posons

$$\overline{x_0} = \mathcal{L}_s(x_0(t)), \quad \overline{x} = \mathcal{L}_s(x(t)).$$

Il vient :

$$\begin{aligned} x_0 &= h\left(\sin(\alpha t)\chi_{[0,+\infty[} + \sin\alpha(t - \frac{\pi}{\alpha})\chi_{[0,+\infty[}(t - \frac{\pi}{\alpha})\right) \\ \overline{x_0} &= h\left(\frac{\alpha}{s^2 + a^2} + \frac{\alpha e^{-\frac{\pi}{\alpha}s}}{s^2 + \alpha^2}\right) \\ \overline{x_0} &= \alpha h \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\alpha}s}}{s^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\omega^2 \alpha h}{(s^2 + \omega^2)} \frac{(1 + e^{-\frac{\pi}{\alpha}s})}{(s^2 + \alpha^2)} \\ &= \omega^2 \alpha h (1 + e^{-\frac{\pi}{\alpha}s}) \frac{1}{\alpha^2 - \omega^2}(\frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{s^2 + \alpha^2}) \\ &= \frac{\omega^2 \alpha h}{\alpha^2 - \omega^2}(1 + e^{-\frac{\pi}{\alpha}s})\mathcal{L}_s(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{\omega^2 \alpha h}{\alpha^2 - \omega^2} \Big[&(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t)\chi_{[0,+\infty[}(t) \\ &+ (\frac{1}{\omega}\sin\omega(t - \frac{\pi}{\alpha}) - \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha(t - \frac{\pi}{\alpha})))\chi_{[0,+\infty[}(t - \frac{\pi}{\alpha}) \Big]. \end{aligned}$$

Si $t \in \left[0, \frac{\pi}{\alpha}\right]$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\omega^2 \alpha h}{\alpha^2 - \omega^2}(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t) \\ &= \frac{\omega \alpha h}{\alpha^2 - \omega^2}\sin\omega t - \frac{\omega^2 h}{\alpha^2 - \omega^2}\sin\alpha t. \end{aligned}$$

Si $t \in [\frac{\pi}{\alpha}, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\omega^2 \alpha h}{\alpha^2 - \omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t + \frac{1}{\omega}\sin \omega(t - \frac{\pi}{\alpha})\right) \\
&= \frac{\omega \alpha h}{\alpha^2 - \omega^2}\left[\sin \omega t + \sin \omega(t - \frac{\pi}{\alpha})\right] \\
&= \frac{2\omega \alpha h}{\alpha^2 - \omega^2}\sin(\omega t - \frac{\omega\pi}{2\alpha})\cos\frac{\omega\pi}{2\alpha} \\
&= \frac{2\omega \alpha h}{\alpha^2 - \omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2\alpha}\sin \omega(t - \frac{\pi}{2\alpha}).
\end{aligned}$$

Passage à basse vitesse Passage à grande vitesse

□

Exercice 7.12 Montrer que si Z est un polynôme n'ayant que des zéros simples, alors

$$\frac{1}{Z(p)} = \mathcal{L}_p\Big(\sum_{\substack{a \\ a \text{ zéro de } Z}} \frac{e^{ax}}{Z'(a)}\Big).$$

Solution: On a

$$\frac{1}{Z(p)} = \sum_{\substack{a \\ Z(a)=0}} \frac{\alpha_a}{p-a}$$

d'où

$$\frac{p-b}{Z(p)} = \sum_{\substack{a \\ Z(a)=0}} \frac{\alpha_a(p-b)}{p-a}$$

et

$$\lim_{p \to b} \frac{p-b}{Z(p)} = \alpha_b$$

si b est un zéro de Z.

Ainsi

$$\alpha_b = \frac{1}{Z'(b)}.$$

□

Exercice 7.13 Soit $L(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$, $a_n \neq 0$ un opérateur de dérivation à coefficients constants de degré n. Montrer que

$$\mathcal{L}_p(A) = \frac{1}{L(p)} \quad \text{si} \quad \Re p > \sup_{L(a)=0} (\Re a)$$

où A est la réponse impulsive associée à $L(D)$ (cf. ex. 5.22).

Solution: Nous savons que

$$L(D)A = 0$$

$$A(0) = 0, \ldots, D^{n-2}A(0) = 0, D^{n-1}A(0) = \frac{1}{a_n}.$$

Ainsi

$$A(x) = \sum_{L(a)=0} P_{\alpha_a - 1}(x) e^{ax}.$$

Il en résulte que $A(x)$ admet une transformée de Laplace unilatérale en p si

$$\Re p > \Re a$$

pour tout a tel que $L(a) = 0$.

De plus,

$$\mathcal{L}_p(Df) = p\mathcal{L}_p(f) - f(0).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_p(DA) &= p\mathcal{L}_p(A) \\
&\vdots \\
\mathcal{L}_p(D^{n-1}A) &= p^{n-1}\mathcal{L}_p(A) \\
\mathcal{L}_p(D^n A) &= p^n \mathcal{L}_p(A) - D^{n-1}A(0).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathcal{L}_p(L(D)A) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k \mathcal{L}_p(A) - a_n D^{n-1}A(0) = 0.$$

Donc

$$L(p)\mathcal{L}_p(A) = 1$$

et

$$\mathcal{L}_p(A) = \frac{1}{L(p)}$$

comme annoncé. □

Exercice 7.14 Soit f une fonction définie et mesurable sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$. Soient aussi les réels $\alpha \in]1, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$ et $p_0 \in \Gamma_f$.

a) Si $\lim_{x \to 0^+} x^{-\alpha} f(x) = A$, alors $\lim_{p \to +\infty} p^{\alpha+1} \mathcal{L}_p(f) = A\Gamma(\alpha + 1)$.

b) Si $\lim_{x \to \infty} x^{-\alpha} f(x) = A$, alors $\lim_{p \to 0^+} p^{\alpha+1} \mathcal{L}_p(f) = A\Gamma(\alpha + 1)$.

Solution: On se ramène au cas $A = 0$ en considérant la fonction

$$F(x) = f(x) - Ax^\alpha \chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Cela étant, soit $\epsilon > 0$.

a) Il existe $\eta > 0$ tel que

$$x^{-\alpha} |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2\Gamma(\alpha + 1)} \quad \text{si } 0 \leq x \leq \eta. \tag{7.2}$$

D'une part, on a alors

$$\lim_{p \to +\infty} p^{\alpha+1} \int_\eta^{+\infty} e^{-px} |f(x)| \, dx = 0$$

en vertu du théorème de Lebesgue. En effet, pour tout $x \geq \eta$, on a

$$\lim_{p \to +\infty} p^{\alpha+1} e^{-px} |f(x)| = 0$$

et il existe $C > 0$ tel que, pour tout $p > \sup\{0, p_0\}$,

$$\begin{aligned} p^{\alpha+1} e^{-px} |f(x)| &\leq p^{\alpha+1} e^{-(p-p_0)\eta} e^{-p_0 x} |f(x)| \\ &\leq Ce^{-p_0 x} |f(x)| \end{aligned}$$

pour $x \in]\eta, +\infty[$.

D'autre part, la majoration 7.2 entraîne

$$\int_0^\eta e^{-px} |f(x)| \, dx \leq \frac{\epsilon}{2} p^{-(\alpha+1)}$$

pour tout $p > \sup\{0, p_0\}$. D'où la conclusion car on a

$$\left|p^{\alpha+1}\mathcal{L}_p(f)\right| \leq p^{\alpha+1}\int_0^\eta e^{-px}\,|f(x)|\,dx + p^{\alpha+1}\int_\eta^{+\infty} e^{-px}\,|f(x)|\,dx$$

pour tout $p > \sup\{0, p_0\}$.

b) Comme f est intégrable sur tout intervalle du type $[0, R]\,(R > 0)$ et vérifie $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} f(x) = 0$, $\mathcal{L}_p(f)$ existe pour tout $p > 0$. Cela étant, soit $\eta > 0$ tel que

$$x^{-\alpha}\,|f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{si } \ x \geq \eta. \tag{7.3}$$

Pour tout $p > 0$, on a alors

$$\left|p^{\alpha+1}\mathcal{L}_p(f)\right| \leq p^{\alpha+1}\int_0^\eta |f(x)|\,dx + p^{\alpha+1}\int_\eta^{+\infty} e^{-px}\,|f(x)|\,dx$$

donc aussi

$$\left|p^{\alpha+1}\mathcal{L}_p(f)\right| \leq p^{\alpha+1}\int_0^\eta |f(x)|\,dx + \frac{\epsilon}{2}$$

en tenant compte de 7.3. D'où la conclusion. □

Chapitre 8

Transformation de Fourier dans L^2

Exercice 8.1 Calculer la transformée de Fourier dans L^2 de f pour

a) $f = x^{-1}\chi_{]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[}(x)$;

b) $f = e^{-x^2/2}$.

(*Suggestion:*
a) La suite de fonctions $f_m = f\chi_{[-m,m]}$ $(m \in \mathbb{N})$ est une suite d'éléments de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ qui converge dans L^2 vers f et telle que la suite $\mathcal{F}_y^{\pm} f_m$ converge partout dans $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} g(y) &= \pm 2i\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y - \int_0^1 \frac{\sin xy}{x}dx\right) \ (y \neq 0) \\ g(0) &= 0. \end{aligned}$$

b) La fonction f appartient aussi à L^1 donc les transformées de Fourier dans L^1 et L^2 sont égales presque partout.)

Exercice 8.2 [*Transformation de Fourier* L^2 *et transformation de Laplace*]

Soit $f \in \mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ nulle sous zéro. On demande de montrer que $\mathcal{L}_{x\pm iy}(f)$ a un sens pour $x > 0$ et que

$$\mathcal{L}_{x\mp iy}(f) \underset{\mathrm{L}^2}{\rightarrow} \mathrm{F}_y^{\pm} f$$

pour $x \to 0^+$.

Solution: Comme $e^{-(x \mp iy)t}$ est de classe $\mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ en t si $x>0$, il est clair que la fonction

$$e^{-(x\mp iy)t}f(t)$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions de carré intégrable.

La transformée de Laplace $\mathcal{L}_{x\mp iy}(f)$ est donc définie si $x>0$. Il est clair que

$$e^{-xt}f(t) \underset{pp}{\rightarrow} f(t)$$

si $x \to 0^+$ et comme

$$\left|(e^{-xt})f(t)\right|^2 \leq |f(t)|^2$$

pour tout x et tout t positifs, le théorème de Lebesgue permet d'affirmer que

$$e^{-xt}f(t) \underset{\mathrm{L}^2}{\rightarrow} f(t)$$

pour $x \to 0^+$. On en déduit que

$$\mathrm{F}^{\pm}_y(e^{-xt}f(t)) \underset{\mathrm{L}^2}{\rightarrow} \mathrm{F}^{\pm}_y f.$$

Or $e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour $x>0$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{F}^{\pm}_y(e^{-xt}f(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iyt}e^{-xt}f(t)dt \\ &= \mathcal{L}_{x\mp iy}(f)\end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Exercice 8.3 Montrer que les fonctions suivantes appartiennent à $L^2 \setminus L^1(\mathbb{R})$ et calculer leur transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ $(a>0)$.

$$\frac{x}{1+x^2}, \quad sign(x)\frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{\cos(x)}{x}\chi_{]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[}, \quad \frac{1-\cos(x)}{x}$$

Exercice 8.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction de C. Hermite $\mathcal{H}_n(x)$ en posant

$$\mathcal{H}_n(x) = e^{x^2/2}D^n_x e^{-x^2}$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\mathcal{H}_n(x) = \sqrt{2\pi}(\pm i)^n \mathcal{H}_n(y).$$

Solution:

On constate aisément par récurrence sur n que

$$\mathcal{H}_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_{(n)}(x)$$

où P_n est un polynôme de degré inférieur à n. On a donc

$$\mathcal{H}_n \in \mathrm{L}^1(]-\infty, +\infty[)$$

Cela étant, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\mathcal{H}_n(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ixy} e^{x^2/2} D_x^n e^{-x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ixy+(x^2/2)} D_x^n e^{-x^2} dx \\
&= e^{\pm ixy+(x^2/2)} D_x^{n-1} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&\qquad - \int_{-\infty}^{+\infty} D_x(e^{\pm ixy+(x^2/2)}) D_x^{n-1} e^{-x^2} dx \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} D_x^n (e^{\pm ixy+(x^2/2)}) e^{-x^2} dx \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} D_x^n (e^{((x\pm iy)^2+y^2)/2}) e^{-x^2} dx \\
&= (-1)^n e^{y^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (D_x^n e^{(x\pm iy)^2/2}) e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
D_y e^{\frac{(x\pm iy)^2}{2}} &= (D_X e^{\frac{X^2}{2}})_{X=x\pm iy} (\pm i) \\
D_x e^{\frac{(x\pm iy)^2}{2}} &= (D_X e^{\frac{X^2}{2}})_{X=x\pm iy}
\end{aligned}$$

donc

$$D_x e^{\frac{(x\pm iy)^2}{2}} = \mp i D_y e^{\frac{(x\pm iy)^2}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\mathcal{H}_n(x) &= (-1)^n (\mp i)^n e^{\dfrac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (D_y^n e^{\frac{(x\pm iy)^2}{2}}) e^{-x^2} dx \\
&= (\pm i)^n e^{\frac{y^2}{2}} D_y^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(x\pm iy)^2}{2}} e^{-x^2} dx \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\pm i)^n e^{\frac{y^2}{2}} D_y^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2} \pm ixy - \frac{y^2}{2} - x^2} dx \right] \\
&= (\pm i)^n e^{\frac{y^2}{2}} D_y^n \left[e^{-\frac{y^2}{2}} \mathcal{F}^{\pm}_{x \to y} (e^{-\frac{x^2}{2}}) \right] \\
&= (\pm i)^n e^{\frac{y^2}{2}} D_y^n \left[e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} \right] \\
&= \sqrt{2\pi} (\pm i)^n \mathcal{H}_n(y).
\end{aligned}$$

□

Exercice 8.5 Soit F un élément de L^∞. Alors il existe $f \in \mathrm{L}^2$ tel que $F = f * f$ si et seulement s'il existe $\varphi \in \mathrm{L}^1$ tel que $F = \mathcal{F}^{\pm}\varphi$.

(*Suggestion:* La condition est nécessaire. De fait, vu le théorème de Parseval (dans L^2), on a

$$F = f * f = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}^{\mp} (\mathrm{F}^{\pm} f . \mathrm{F}^{\pm} f).$$

La condition est suffisante. Si φ est intégrable, alors il s'écrit sous la forme $\varphi = g^2$ avec $g \in \mathrm{L}^2$ (prendre $g = e^{(i/2)\arg\varphi} \sqrt{|\varphi|}$), donc aussi sous la forme du carré d'une transformée de Fourier dans L^2. D'où la conclusion en se rappelant que l'on a $F = \mathcal{F}^{\pm}\varphi$ par hypothèse et en appliquant le théorème de Parseval.)

Exercice 8.6 Soit $f \in L^1$. On a

$$\mathcal{F}^+ f \in L^2 \iff f \in L^2.$$

Solution: Si $f \in L^2 \cap L^1$, alors $\mathcal{F}^+ f = F^+ f \in L^2$.

Réciproquement, démontrons que $f = (2\pi)^{-n} F^- \mathcal{F}^+ f$. Pour cela, démontrons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx\ f(x)\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \varphi(x) F_x^- \mathcal{F}^+ f$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. De fait, on a successivement

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} dx\ \varphi(x) F_x^- \mathcal{F}^+ f &= \int_{\mathbb{R}^n} dx\ F_x^- \varphi \mathcal{F}_x^+ f \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \mathcal{F}_x^- \varphi \mathcal{F}_x^+ f \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \mathcal{F}_x^+ \mathcal{F}^- \varphi\ f(x) \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \varphi(x)\ f(x)
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de transfert dans L^2, dans L^1 et le théorème de Fourier. □

Exercice 8.7 Soit A une partie intégrable de $\mathbb{R}^n$. On pose $f = F^+\chi_A$. Calculer $f * f$.

Solution: Pour tous $g, h \in L^2$, on a

$$\mathcal{F}^{\mp}\left(F^{\pm}g\ F^{\pm}h\right) = (2\pi)^n g * h$$

sur $\mathbb{R}^n$. Avec $g = f = h$, on obtient

$$f * f = \mathcal{F}^+\left(F^- f\ F^- f\right) = (2\pi)^n \mathcal{F}^+\chi_A = (2\pi)^n f$$

donc aussi

$$((2\pi)^{-n} f) * ((2\pi)^{-n} f) = (2\pi)^{-n} f.$$

A comparer avec $G * G = G, G \in L^1$, voir exercice 6.1. □

Exercice 8.8 a) Soit $f \in L^2$ tel que $F_x^+ f \neq 0$ pour presque tout x. Alors

$$\left(g \in L^2,\ \langle g, f(.+c)\rangle_{L^2} = 0 \text{ pour tout } c \in \mathbb{R}^n\right) \implies g = 0.$$

b) Soit $f \in L^1 \cap L^2$ tel que $\mathcal{F}_x^+ f \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\left(g \in L^2,\ \langle g, h * f\rangle_{L^2} = 0 \text{ pour tout } h \in L^2\right) \implies g = 0.$$

Solution: a) Comme

$$F_x^{\pm} f(.+c) = e^{\mp i\langle x,c\rangle} F_x^{\pm} f$$

la formule de Parseval conduit à

$$0 = (2\pi)^n \langle g, f(.+c)\rangle = \left\langle F^+ g, F^+ f(.+c)\right\rangle = \mathcal{F}^+_{x\to c}(F^+ g\ \overline{F^+ f}).$$

Il s'ensuit que $F^+ g\ \overline{F^+ f} = 0$ pp donc que (vu l'hypothèse) $F^+ g = 0$ pp et finalement $g = 0$ pp.

b) On a $g = 0$ si et seulement si $F^- \tilde{g} = 0$, ou encore (vu la condition sur f) si et seulement si $F^- \tilde{g}\ \overline{\mathcal{F}^+ f} = F^- \tilde{g}\ \mathcal{F}^- \overline{f} = 0$. Et ceci a lieu si et seulement si

$$\mathcal{F}^+\left(F^- \tilde{g}\ \mathcal{F}^- \overline{f}\right) = \mathcal{F}^+\left(F^- \tilde{g}\ F^- \overline{f}\right) = (2\pi)^n \tilde{g} * \overline{f} = 0.$$

De plus, comme $\tilde{g} * \overline{f} \in L^2$, on a

$$\tilde{g} * \overline{f} = 0 \iff \left(\tilde{g} * \overline{f}\right) * \left(\tilde{g} * \overline{f}\right)^* = 0.$$

Pour conclure, il suffit donc de prouver que

$$(\tilde{g} * \overline{f}) * G = \tilde{g} * (\overline{f} * G) = 0$$

pour tout $G \in L^2$. De fait, on a

$$(\overline{f} * G)(y + x) = (\overline{f} * G(x - .))(y)$$

donc

$$\begin{aligned}
\tilde{g} * (\overline{f} * G)(x) &= \int dy\ g(y)(\overline{f} * G)(x + y) \\
&= \int dy\ g(y)(\overline{f} * G(x - .))(y) \\
&= \langle g, f * (\overline{G}(x - .)) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

vu l'hypothèse. $\square$

Exercice 8.9 [*Espace de Sobolev* H^1]

Plaçons-nous sur la droite réelle et définissons l'espace H^1 comme étant l'ensemble des fonctions de L^2 qui ont une dérivée généralisée dans L^2. Rappelons que cette dérivée est caractérisée par le fait que pour tout $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$\langle Df, \varphi \rangle = \langle f, -D\varphi \rangle .$$

Pour tout $f \in \mathrm{H}^1$, on pose

$$\|f\|_{\mathrm{H}^1} = \|f\|_{\mathrm{L}^2} + \|Df\|_{\mathrm{L}^2} .$$

On demande de montrer que

a) H^1 est un sous-espace linéaire de L^2,

b) $(\mathrm{H}^1, \|\cdot\|_{\mathrm{H}^1})$ est un espace de Banach,

c) si $f \in \mathrm{H}^1$ et $g \in \mathrm{L}^2$ (resp. L^1), alors $f * g \in \mathrm{L}^\infty$ (resp. L^2) admet une dérivée généralisée dans L^∞ (resp. L^2) donnée par

$$D(f * g) = Df * g,$$

d) toute fonction de H^1 est limite dans H^1 d'une suite de fonctions C^∞ à support compact,

e) si f et g sont des fonctions de H^1, alors

$$\langle Df, g\rangle = -\langle f, Dg\rangle\,,$$

f) on dispose d'une inclusion naturelle continue de l'espace de Banach $H^1(\mathbb{R})$ dans l'espace de Banach $C^0_b(\mathbb{R})$.

Solution: Le point (a) est évident.

Pour démontrer (b), considérons une suite f_m de Cauchy dans $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$. Vu la définition de $\|\cdot\|_{H^1}$, il est clair que cela implique que $\forall\epsilon > 0$, $\exists M_\epsilon$ tel que $\forall m$, $n > M_\epsilon$, on a

$$\|f_m - f_n\|_{L^2} + \|Df_m - Df_n\|_{L^2} \leq \epsilon. \tag{8.1}$$

On en déduit que f_m et Df_m sont de Cauchy dans L^2. Notons f et g leur limite respective. Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, il est clair que

$$\langle f_m, -D\varphi\rangle \to \langle f, -D\varphi\rangle$$

$$\langle Df_m, \varphi\rangle \to \langle g, \varphi\rangle\,.$$

Donc, vu l'unicité des limites des suites dans $\mathbb{C}$, on a

$$\langle f, -D\varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle\,.$$

Cette relation montre que $g = Df$, d'où l'on tire que $f \in H^1$. De plus, en passant à la limite dans la relation (8.1), on voit que $\forall m > M_\epsilon$, on a

$$\|f - f_m\|_{L^2} + \|Df - Df_m\|_{L^2} \leq \epsilon.$$

Cette relation montre que $f_m \to f$ dans l'espace H^1, ce qui achève d'établir (b).

Passons au point (c). Soient $f \in H^1$ et $g \in L^2$. Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}\langle f * g, -D\varphi\rangle &= (f*g) * D\widetilde{\widetilde{\varphi}}\Big|_{x=0}\\ &= g * (f * D\widetilde{\widetilde{\varphi}})\Big|_{x=0}.\end{aligned}$$

Or, on a

$$(f * D\widetilde{\widetilde{\varphi}})_x = \int f(y) D\widetilde{\widetilde{\varphi}}(x-y)dy$$

$$\begin{aligned} &= \int f(y) - D\overline{\varphi}(y-x)dy \\ &= \int (D_y f)\overline{\varphi}(y-x)dy \\ &= (Df) * \widetilde{\overline{\varphi}}. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} \langle f * g, -D\varphi\rangle &= g * (Df * \widetilde{\overline{\varphi}})\Big|_{x=0} \\ &= \langle (Df * g), \varphi\rangle, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Pour le point (d), remarquons d'abord que si $f \in \mathrm{H}^1$ et est à support compact, alors $f * \rho_{1/m}$ est une suite de fonctions de $D(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans H^1 car le point (c) montre que

$$D(f * \rho_{1/m}) = Df * \rho_{1/m}$$

et cela entraîne la convergence de $D(f * \rho_{1/m})$ vers Df dans L^2. Il nous suffit donc d'établir que tout $f \in \mathrm{H}^1$ est limite dans H^1 d'une suite d'éléments de H^1 à support compact.

Pour construire cette suite, considérons une fonction $\alpha \in D(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1, 1]$ et nulle sur $\complement[-2, 2]$ et posons

$$f_m(x) = f(x)\alpha(\frac{x}{m}).$$

Il est clair que f_m converge vers f dans L^2. De plus, on vérifie aisément que

$$Df_m = Df \;\; \alpha(\frac{x}{m}) + f \;\; D\alpha(\frac{x}{m}) \; \frac{1}{m}.$$

Pour conclure, il suffit alors de constater que

$$f \;\; D\alpha(\frac{x}{m}) \; \frac{1}{m} \underset{\mathrm{L}^2}{\rightarrow} 0$$

puisque

$$\left\| f(D\alpha)(\frac{x}{m})\frac{1}{m} \right\|_2 \leq \frac{1}{m} \;\; \|f\|_{\mathrm{L}^2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |D\alpha(x)| \, .$$

Le point (e) est une conséquence directe de (c).

Pour établir (f), remarquons que

$$2\pi\varphi(x) = \mathcal{F}_x^- \mathcal{F}^+ \varphi$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2\pi\,|\varphi(x)| &\leq \int \left|\mathcal{F}_y^+\varphi\right| dy \\ &\leq \int_I \left|\mathcal{F}_y^+\varphi\right| dy + \int_{\complement I} y \left|\mathcal{F}_y^+\varphi\right| \frac{1}{y} dy \end{aligned}$$

où $I = [-1, 1]$.

Comme $\frac{1}{y}\chi_{\complement I}$ est une fonction de classe $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, l'inégalité de Schwarz montre que

$$2\pi\,|\varphi(x)| \leq \sqrt{\mathrm{mes}(I)}\,\left\|\mathcal{F}^+\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2} + \left\|y\mathcal{F}_y^{\pm}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2}\left\|\frac{1}{y}X_{\complement I}\right\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Ainsi, il existe une constante A telle que

$$|\varphi(x)| \leq A\,\|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}\,.$$

Soient f un élément de H^1 et φ_m une suite de $D(\mathbb{R})$ qui approche f dans H^1. Comme φ_m est de Cauchy dans H^1, la majoration précédente montre que φ_m est de Cauchy dans $\mathrm{C}_b^0(\mathbb{R})$. Notons g sa limite. Comme on peut extraire de φ_m une sous-suite qui converge *pp* vers f, il est clair que $f \underset{pp}{=} g$. De plus, la majoration obtenue montre en passant à la limite que

$$|g(x)| \leq A\,\|f\|_{\mathrm{H}^1}\,.$$

La loi qui, à tout $f \in \mathrm{H}^1$, associe la seule fonction continue g qui lui est égale *pp* est donc une inclusion continue comme annoncé. □

Exercice 8.10 Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que

a) $\mathrm{F}^{\pm}f \in \mathrm{H}^1$ ssi $xf \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que dans ce cas, on a

$$D\mathrm{F}^{\pm}f = \mathrm{F}^{\pm}(\pm ixf)$$

b) $f \in \mathrm{H}^1$ ssi $y\mathrm{F}_y^{\pm}f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que dans ce cas, on a

$$\mathrm{F}^{\pm}Df = \mp iy\mathrm{F}_y^{\pm}f.$$

Solution: Il suffit d'établir (b) car (a) s'en déduit par transformation de Fourier L^2. Supposons donc que $f \in \mathrm{H}^1$. L'exercice sur l'espace de Sobolev H^1 montre qu'il existe une suite $\varphi_m \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans H^1. On en déduit que $\mathrm{F}^{\pm}\varphi_m \to \mathrm{F}^{\pm}f$ dans L^2. Et quitte à remplacer φ_m par une sous-suite, on peut également supposer que cette convergence a lieu presque partout.

Donc, d'une part, $\mp iy\mathrm{F}^{\pm}\varphi_m \to \mp iy\mathrm{F}^{\pm}f$ presque partout. Or, d'autre part, $\mp iy\mathrm{F}^{\pm}\varphi_m = \mathrm{F}^{\pm}(D\varphi_m)$, donc $\mp iy\mathrm{F}^{\pm}\varphi_m \to \mathrm{F}^{\pm}(Df)$ dans L^2. Ainsi

$$\mathrm{F}^{\pm}(Df) = \mp iy\mathrm{F}_y^{\pm}f$$

d'où la conclusion.

Supposons maintenant que $y\mathrm{F}_y^{\pm}f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a successivement

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{2\pi}\mathrm{F}^{\mp}(\mp iy\mathrm{F}_y^{\pm}f), \varphi \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\left\langle \mp iy\mathrm{F}_y^{\pm}f, \mathrm{F}_y^{\pm}\varphi\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\langle \mathrm{F}_y^{\pm}f, \pm iy\mathrm{F}_y^{\pm}\varphi\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\langle \mathrm{F}_y^{\pm}f, \mathrm{F}^{\pm}(-D\varphi)\right\rangle \\ &= \langle f, -D\varphi\rangle .\end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathrm{H}^1$ et

$$Df = \frac{1}{2\pi}\mathrm{F}^{\mp}(\mp iy\mathrm{F}_y^{+}f)$$

d'où la conclusion par transformation de Fourier L^2. □

Exercice 8.11 Si $f, xf, y\mathrm{F}_y^{\pm}f$ sont des fonctions de classe L^2, montrer que f et $\mathrm{F}^{\pm}f \in \mathrm{H}^1$ et que

a) $\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq 2\,\|xf\|_{\mathrm{L}^2}\,\|Df\|_{\mathrm{L}^2}$

b) $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\|xf\|_{\mathrm{L}^2}}{\|f\|_{\mathrm{L}^2}}\dfrac{\left\|y\mathrm{F}_y^{\pm}f\right\|_{\mathrm{L}^2}}{\left\|\mathrm{F}_y^{\pm}f\right\|_{\mathrm{L}^2}}.$

Solution: Le fait que f et $\mathrm{F}_y^{\pm}f \in \mathrm{H}^1$ a déjà été établi dans les exercices sur l'espace de Sobolev H^1. Un calcul rapide montre que l'on a

$$(f * xf^*)_y + (xf * f^*)_y = y(f * f^*)_y.$$

Comme $f \in \mathrm{H}^1$ et $(xf) \in \mathrm{L}^2$, chacun des produits de convolution ci-dessus se trouve dans $\mathrm{L}^\infty \cap \mathrm{C}^0$ et admet une dérivée généralisée dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Si l'on dérive l'égalité obtenue en tenant compte des propriétés de l'espace H^1 (cf. Ex 8.8), on voit que

$$Df * xf^* - xf * (Df)^* = f * f^* + x(Df * f^*).$$

En évaluant cette relation en 0, il vient

$$-\langle Df, xf\rangle - \langle xf, Df\rangle = \langle f, f\rangle$$

d'où l'on tire que

$$-2\Re\langle Df, xf\rangle = \langle f, f\rangle .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre alors que l'on a

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq 2\,\|Df\|_{\mathrm{L}^2}\,\|xf\|_{\mathrm{L}^2}$$

comme annoncé. Tenant compte de la relation $\|\mathrm{F}^{\pm}f\|_{\mathrm{L}^2} = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_{\mathrm{L}^2}$, on en tire que

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2}\,\frac{\|\mathrm{F}^{\pm}f\|_{\mathrm{L}^2}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{2\,\|\mathrm{F}^{\pm}Df\|_{\mathrm{L}^2}}{\sqrt{2\pi}}\,\|xf\|_{\mathrm{L}^2}$$

d'où la conclusion. □

Remarque: L'exercice précédent fournit une version mathématique du célèbre principe d'incertitude de Heisenberg.

Exercice 8.12 Montrer que si $f \in \mathrm{H}^1$ et si $xf \in \mathrm{L}^2$, alors il existe une suite $\varphi_m \in D(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi_m \underset{\mathrm{L}^2}{\rightarrow} f,\ x\varphi_m \underset{\mathrm{L}^2}{\rightarrow} xf,\ D\varphi_m \underset{\mathrm{L}^2}{\rightarrow} Df.$$

Solution: On peut se limiter au cas où f est à support compact. En effet, soit α une fonction de $D(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1, 1]$ et nulle sur $\complement[-2, 2]$.

Nous avons déjà montré que

$$f\alpha(\frac{x}{m}) \underset{\mathrm{H}^1}{\rightarrow} f$$

et le théorème de Lebesgue montre que

$$xf(x)\alpha(\frac{x}{m}) \underset{\mathrm{L}^2}{\rightarrow} xf(x).$$

Soit donc $f \in \mathrm{L}^2_{comp}$. La théorie des unités approchées de convolution combinée aux résultats sur l'espace H^1 obtenus précédemment nous montre que

$$f * \rho_{1/m} \underset{\mathrm{H}^1}{\rightarrow} f.$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que

$$\left\|x(f * \rho_{1/m}) - xf\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \sup_{x\in K}|x|\,\left\|f * \rho_{1/m} - f\right\|_{\mathrm{L}^2}$$

où K est le compact

$$\{x : d(x, \mathrm{Supp}(f)) \leq 1\}.$$

□

Remarque: Ce résultat permet de démontrer que

$$\langle xf, Df \rangle + \langle Df, xf \rangle + \langle f, f \rangle = 0$$

si $f \in \mathrm{H}^1$ et si $xf \in \mathrm{L}^2$. En effet, cette formule est une conséquence directe de la formule de Leibnitz si $f \in D(\mathbb{R})$ et elle s'étend par continuité au cas envisagé vu la propriété d'approximation établie dans l'exercice ci-dessus.

Chapitre 9

Séries de Fourier dans L^2

Exercice 9.1 Développer la fonction

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

en série de Fourier trigonométrique dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

(*Suggestion:* Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons

$$a_m = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

et

$$b_m = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

posons aussi

$$a_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

On obtient alors les valeurs $a_m = 0$ pour tout m et $b_m = \frac{1}{m}$ pour tout m. Il s'ensuit que la suite

$$S_M(x) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\sin mx}{m}$$

converge dans $L^2(]0,2\pi[)$ vers f et presque partout sur $]0,2\pi[$ vers f. De plus, comme la fonction

$$S(x) := \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin mx}{m}$$

est continue sur l'ouvert $]0,2\pi[$, on obtient finalement $S(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,2\pi[$.

De plus, la formule de Parseval donne l'égalité

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$$

et par suite $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

Exercice 9.2 Développer les fonctions suivantes en série trigonométrique de Fourier dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \chi_{]-\pi,-\pi/2]} - \chi_{]-\pi/2,\pi/2]} + \chi_{]\pi/2,\pi]} \\ g(x) &:= \chi_{]-\pi,-\pi/2]} - \chi_{]-\pi/2,0]} + \chi_{]0,\pi/2]} - \chi_{]\pi/2,\pi]}. \end{aligned}$$

Solution:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)} \cos(2m-1)x;$$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)} \sin 2(2m-1)x.$$

Les graphiques suivants représentent successivement

$$\chi_{]-\pi,-\pi/2]} - \chi_{]-\pi/2,\pi/2]} + \chi_{]\pi/2,\pi[} \quad \text{et} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{3} (-1)^m \frac{\cos(2m-1)x}{2m-1}$$

$$\chi_{]-\pi,-\pi/2]} - \chi_{]-\pi/2,\pi/2]} + \chi_{]\pi/2,\pi[} \quad \text{et} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{6} (-1)^m \frac{\cos(2m-1)x}{2m-1}$$

$$\chi_{]-\pi,-\pi/2]} - \chi_{]-\pi/2,\pi/2]} + \chi_{]\pi/2,\pi[} \quad \text{et} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{8} (-1)^m \frac{\cos(2m-1)x}{2m-1}$$

$$\chi_{]-\pi,-\pi/2]} - \chi_{]-\pi/2,\pi/2]} + \chi_{]\pi/2,\pi[} \quad \text{et} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{15} (-1)^m \frac{\cos(2m-1)x}{2m-1}$$

$\square$

Exercice 9.3 Développer en série trigonométrique de Fourier
a) $\sin(x)$ dans $L^2([0,2\pi])$ et dans $L^2([0,\pi])$
b) x^3 dans $L^2([-\pi,\pi])$ et dans $L^2([0,2\pi])$
c) e^x dans $L^2([-\pi,\pi])$ et dans $L^2([0,2\pi])$
d) $x\chi_{[-\pi,0]}(x)$ dans $L^2([-\pi,\pi])$ et dans $L^2([0,2\pi])$
e) $\sin^2(x)$ dans $L^2([0,\pi])$
f) $\sin(x)\,|\sin(x)|$ dans $L^2([0,2\pi])$
g) $\sin^3(x)$ dans $L^2([0,2\pi])$
h) $\sin(x)\cos^2(x)$ dans $L^2([0,2\pi])$.

Solution: a) On a $\sin(x) = \sin(x)$ dans $L^2([0,2\pi])$ et

$$\sin(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}$$

dans $L^2([0,\pi])$.

b) On a

$$x^3 = 2\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^{m+1}\left(\frac{\pi^2}{m} - \frac{6}{m^3}\right)\sin(mx)$$

dans $L^2([-\pi,\pi])$ et

$$x^3 = 2\pi^3 + 12\pi \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{m^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{12}{m^3} - \frac{8\pi^2}{m} \right) \sin(mx)$$

dans $L^2([0,2\pi])$.

c) On a

$$e^x = \frac{sh(\pi)}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{\cos(mx) - m\sin(mx)}{1+m^2} \right)$$

dans $L^2([-\pi,\pi])$ et

$$e^x = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(mx) - m\sin(mx)}{1+m^2} \right)$$

dans $L^2([0,2\pi])$.

d) On a

$$x\chi_{[-\pi,0]}(x) = \frac{-\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos((2m-1)x)}{(2m-1)^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin(mx)}{m}$$

dans $L^2([-\pi,\pi])$ et

$$x\chi_{[-\pi,0]}(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{m^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin(mx)}{m}$$

dans $L^2([0,2\pi])$.

e) On a

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

dans $L^2([0,\pi])$.

f) On a

$$\sin(x)\ |\sin(x)| = \frac{10}{3\pi}\sin(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4(m+1)^3 - 1} - \frac{1}{4m^3-1} \right) \sin((2m+1)x)$$

dans $L^2([0,2\pi])$.

g) On a

$$\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

dans $L^2([0, 2\pi])$.

h) On a

$$\sin(x)\cos^2(x) = \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(3x)$$

dans $L^2([0, 2\pi])$. □

Exercice 9.4 Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et f une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$. On pose

$$G(x) := \int_{-\pi}^{\pi} dt\ f(t)g(x-t) = (f\chi_{[-\pi,\pi]} * g)(x).$$

a) Montrer que G est continu sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique
b) Calculer les coefficients du développement de G en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$ en fonction des coefficients du développement de f et de g.

Solution: a) La fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur le compact $[-\pi, \pi]$. La continuité de G s'obtient directement par application du théorème de Lebesgue. La périodicité de G est due à la périodicité de g.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G(x) = \langle f, \overline{g}(x - .)\rangle_{L^2([-\pi,\pi])}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, posons $u_m(x) = e^{imx}/\sqrt{2\pi}$. Comme g est 2π-périodique, on a

$$g = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} b_n u_n$$

dans L^2_{loc} et pp sur $\mathbb{R}$, donc

$$\overline{g}(x - .) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \overline{b}_n u_{-n}(x - .)$$

dans L^2_{loc} pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a aussi

$$f = \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=-M}^{M} b_m u_m$$

dans $L^2([-\pi,\pi])$ et pp sur $[-\pi,\pi]$. Comme $u_{-n}(x-.) = e^{-inx}u_n(.)$, il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G(x) = \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=-M}^{M} a_m b_m e^{imx}. \tag{9.1}$$

Comme $\sum_{m=-M}^{M} |a_m|^2$ et $\sum_{m=-M}^{M} |b_m|^2$ convergent, la suite $\sum_{m=-M}^{M} |a_m b_m|^2$ converge aussi. Ceci implique que la convergence de (9.1) a lieu aussi dans $L^2([-\pi,\pi])$, donc que cette égalité fournit le développement de G demandé. □

Exercice 9.5 [*Corde vibrante amortie*]

Rappelons que le mouvement d'une corde vibrante amortie est régi par l'équation

$$(D_x^2 - aD_t^2 - bD_t)u(x,t) = 0$$

où $a > 0, b > 0$ et où $u(x,t)$ désigne l'écart à la position d'équilibre. On demande de déterminer $u(x,t)$ en supposant que la corde est fixée en $(0,0)$ et en $(\pi,0)$, que l'écart initial à la position d'équilibre est donné par $g(x) \in \mathrm{C}^3(\mathbb{R})$ et que la vitesse initiale $D_t u(x,0)$ est nulle.

Solution:

I) — Une méthode de résolution formelle consiste à trouver $u(x,t)$ sous la forme suivante

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(t)\cos mx + \sum_{m=1}^{+\infty} s_m(t)\sin mx.$$

Cela étant, on constate que les conditions de fixation sont réalisées si les $c_m(t)$ sont tous nuls. En tenant compte de ceci et en dérivant terme à terme, on obtient la relation suivante

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (aD_t^2 + bD_t + m^2)s_m(t)\sin mx = 0.$$

Cette dernière relation a lieu si les fonctions $s_m(t)$ vérifient

$$P(m, D_t)s_m(t) = 0$$

où on a posé
$$P(m, D_t) = aD_t^2 + bD_t + m^2.$$
Le réalisant ρ_m de $P(m,t)$ est égal à $b^2 - 4am^2$; par conséquent, ρ_m finit par être négatif. Soit m_0 la plus petite valeur de m telle que $\rho_m \leq 0$. Si on suppose que ρ_m diffère de 0 pour tout m, on obtient

a) pour $1 \leq m < m_0$: $s_m(t) = \beta_m e^{x(1,m)t} + \gamma_m e^{x(2,m)t}$ où $x(1,m) = (\rho_m^{1/2} - b)/2a$ et $x(2,m) = -(\rho_m^{1/2} + b)/2a$ sont les racines de $P(m,t)$ et où β_m et γ_m sont des constantes;

b) pour $m \geq m_0$: $s_m(t) = e^{-bt/2a}(\beta_m \cos(|\rho_m|^{1/2} t/2a) + \gamma_m \sin(|\rho_m|^{1/2} t/2a))$ où β_m et γ_m sont des constantes.

On obtient alors $u(x,t)$ sous la forme suivante
$$\begin{aligned} u(x,t) \quad = \quad & \sum_{m=1}^{m_0-1} (\beta_m e^{x(1,m)t} + \gamma_m e^{x(2,m)t}) \sin mx + \\ & \sum_{m=m_0}^{+\infty} (\beta_m \cos(|\rho_m|^{1/2} \frac{t}{2a}) + \gamma_m \sin(|\rho_m|^{1/2} \frac{t}{2a}))e^{-bt/(2a)} \sin mx. \end{aligned}$$

II) — Tenons compte à présent de la perturbation initiale.
Comme g est antisymétrique et périodique, on a
$$\sum_{m=1}^{+\infty} g_m \sin mx \underset{\mathbb{R}}{\Rightarrow} g(x), \text{ avec } g_m = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} dx g(x) \sin mx.$$
Dès lors la relation $u(x,0) = g(x)$ se traduit par
$$\sum_{m=1}^{m_0-1} (\beta_m + \gamma_m) \sin mx + \sum_{m=m_0}^{+\infty} \beta_m \sin mx = \sum_{m=1}^{+\infty} g_m \sin mx.$$
Cette dernière égalité est vérifiée si les constantes β_m et γ_m satisfont à
$$\beta_m + \gamma_m = g_m \ (m < m_0) \ \text{ et } \ \beta_m = g_m \ (m \geq m_0). \tag{9.2}$$

III) — En tenant compte à présent de la vitesse initiale nulle et du développement de $u(x,t)$, on obtient la relation
$$\sum_{m=1}^{m_0-1} [x(1,m)\beta_m + x(2,m)\gamma_m] \sin mx +$$
$$\sum_{m=m_0}^{+\infty} \left[(-\frac{b}{2a})\beta_m + |\rho_m|^{1/2} (2a)^{-1}\gamma_m\right] \sin mx = 0.$$

Cette dernière égalité est vérifiée si

$$\begin{aligned} x(1,m)\beta_m + x(2,m)\gamma_m &= 0\ (m < m_0) \\ (-\frac{b}{2a})\beta_m + |\rho_m|^{1/2}(2a)^{-1}\gamma_m &= 0\ (m \geq m_0). \end{aligned} \tag{9.3}$$

IV) — Si $m < m_0$, vu (9.2) et (9.3) et en tenant compte du fait que ρ_m et $x(2,m)$ diffèrent de 0, on obtient

$$\beta_m = -ax(2,m)\rho_m^{-1/2} g_m$$

et

$$\gamma_m = ax(1,m)\rho_m^{-1/2} g_m.$$

Si $m \geq m_0$, on obtient (voir (9.2) et (9.3))

$$\beta_m = g_m \quad \text{et} \quad \gamma_m = b\,|\rho_m|^{-1/2}\, g_m.$$

Au total, $u(x,t)$ est égal à

$$\sum_{m=1}^{m_0-1} ag_m\rho_m^{-1/2}\left[x(2,m)e^{x(1,m)t} - x(1,m)e^{x(2,m)t}\right]\sin mx +$$

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} g_m e^{-bt/2a}\left[\cos(|\rho_m|^{1/2}(2a)^{-1}t) + b\,|\rho_m|^{-1/2}\sin(|\rho_m|^{1/2}(2a)^{-1}t\right]\sin mx.$$

V) — Pour vérifier que cette fonction est bien une solution, il suffit de vérifier que les dérivées (terme à terme) d'ordre 0,1,2 convergent uniformément sur tout compact (de $\mathbb{R}$). On peut alors effectivement dériver $u(\cdot,\cdot)$ terme à terme et les expressions obtenues satisfont aux relations de départ.

VI) — Etude de la solution. La fonction u est en fait une superposition d'harmoniques. Considérons le cas où g_m est nul sauf pour une valeur de m.

Si $m < m_0$, le réalisant ρ_m est strictement positif et u s'écrit

$$u(x,t) = ag_m\rho_m^{-1/2}\left[x(2,m)e^{x(1,m)t} - x(1,m)e^{x(2,m)t}\right]\sin mx$$

avec $x(1,m)$ et $x(2,m)$ strictement négatifs. Il n'y a donc pas d'oscillation temporelle (amortissement fort).

Si $m \geq m_0$, le réalisant ρ_m est strictement négatif et u s'écrit

$$\begin{aligned} &u(x,t) \\ &= g_m e^{-bt/2a}\left[\cos(|\rho_m|^{1/2}(2a)^{-1}t) + b\,|\rho_m|^{-1/2}\sin(|\rho_m|^{1/2}(2a)^{-1}t)\right]\sin mx \\ &= g_m e^{-bt/2a}\sin(|\rho_m|^{1/2}(2a)^{-1}t + \theta_m)\sin mx. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une oscillation amortie au cours du temps.

NB: cas $b = 0$: corde non amortie. Dans ce cas, on a $\rho_m > 0$ et on est toujours dans le deuxième cas (i.e. $m \geq m_0 = 1$). De plus, on constate qu'il n'y a pas d'amortissement au cours du temps (exponentielle égale à 1). □

Exercice 9.6 [*Membranes vibrantes*]

La physique théorique nous apprend que toute membrane d'équation

$$z = L(x, y, t)$$

se déforme au cours du temps en respectant l'équation aux dérivées partielles

$$D_t^2 L(x, y, t) - \Delta L(x, y, t) = 0$$

Si la membrane est fixée le long d'une courbe plane Γ, il faut encore tenir compte de la condition aux limites

$$L(x, y, t) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma$$

Nous nous proposons de déterminer explicitement $L(x, y, t)$ dans le cas où Γ est le bord du rectangle $[0, A] \times [0, B]$ en nous limitant aux solutions de classe C_∞.

Solution: Nous allons procéder en deux étapes.

Solutions Stationnaires — Cherchons tout d'abord les solutions non identiquement nulles du type

$$L(x, y, t) = U(x, y)V(t)$$

L'équation aux dérivées partielles devient:

$$U(x, y)D_t^2 V(t) - \Delta U(x, y)V(t) = 0$$

et la condition aux limites donne:

$$U(x, y)V(t) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma$$

Comme $V(t)$ n'est pas identiquement nul, on en déduit qu'il existe t_0 tel que $V(t_0) \neq 0$. Il vient alors par division:

$$U(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma$$

et

$$\frac{\Delta U(x, y)}{U(x, y)} = \frac{D_t^2 V(t_0)}{V(t_0)} = \lambda \text{ si } U(x, y) \neq 0$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \Delta U - \lambda U &= 0 \\ D_t^2 V(t) - \lambda V(t) &= 0 \end{aligned}$$

Le problème est donc réduit à déterminer les fonctions de classe C_∞ $U(x, y)$ et $V(t)$ non identiquement nulles et les nombres réels λ tels que

$$\begin{cases} \Delta U - \lambda U &= 0 \\ U_{|\Gamma} &= 0 \end{cases}$$

$$D_t^2 V(t) - \lambda V(t) = 0$$

Ce qui précède nous suggére de traiter tout d'abord le problème aux valeurs propres consistant à déterminer les fonctions $U(x, y)$ de classe C_∞ et les réels λ tels que

$$\begin{cases} \Delta U - \lambda U &= 0 \\ U_{|\Gamma} &= 0 \end{cases}$$

Nous aborderons le problème précédent en déterminant d'abord les solutions non triviales à variables séparées:

$$U(x, y) = M(x)L(y)$$

L'équation $\Delta U - \lambda U = 0$ devient alors

$$D_x^2 M(x)L(y) + M(x)D_y^2 L(y) - \lambda M(x)L(y) = 0$$

On en déduit que si $M(x) \neq 0$ et si $L(y) \neq 0$ alors

$$\frac{D_x^2 M(x)}{M(x)} + \frac{D_y^2 L(y)}{L(y)} = \lambda$$

Quant aux conditions aux limites, elles deviennent

$$\begin{aligned} M(0) &= M(A) = 0 \\ L(0) &= L(B) = 0 \end{aligned}$$

De la première équation, on déduit l'existence de réels α et β tels que

$$\begin{cases} D^2 M - \alpha M &= 0 \\ D^2 L - \beta L &= 0 \\ \alpha + \beta &= \lambda \end{cases}$$

Si $\alpha > 0$, on a

$$M(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha} x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha} x}$$

et les conditions aux limites montrent que l'on a

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\alpha}A} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}A} &= 0 \end{aligned}$$

Or

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\alpha}A} & e^{-\sqrt{\alpha}A} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{\alpha}A} - e^{\sqrt{\alpha}A}$$

et ce déterminant est non nul car $A \neq 0$. Ainsi $C_1 = C_2 = 0$ et M est la solution triviale.

Si $\alpha = 0$, on a

$$M(x) = C_1 x + C_2$$

et M est de nouveau la solution triviale car les conditions initiales montrent que

$$C_2 = 0 = C_1 A$$

Si $\alpha < 0$, on a

$$M(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\alpha}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\alpha}x)$$

et les conditions initiales montrent que

$$C_1 = 0 = C_2 \sin(\sqrt{-\alpha}A)$$

Les seules solutions non triviales sont donc de la forme

$$M(x) = C \sin(\sqrt{-\alpha}x) \quad C \neq 0$$

pour lesquelles il existe un naturel k tel que

$$\sqrt{-\alpha}A = k\pi$$

En procédant de même pour $L(y)$, on voit que les solutions non triviales à variables séparées sont les fonctions $U(x,y)$ de la forme

$$U(x,y) = C \sin(\frac{k\pi x}{A}) \sin(\frac{l\pi y}{B}) \quad C \neq 0$$

le paramètre λ correspondant étant donné par

$$-\lambda = \left(\frac{k^2}{A^2} + \frac{l^2}{B^2}\right)\pi^2$$

Posons

$$U_{kl}(x,y) = \sin(\frac{k\pi x}{A}) \sin(\frac{l\pi y}{B})$$

et

$$\omega_{kl} = \pi\sqrt{\frac{k^2}{A^2} + \frac{l^2}{B^2}}$$

Nous allons montrer que toute fonction $U(x, y)$ qui s'annule avec ses dérivées paires en tout point de Γ est la limite dans $C_\infty(]0, A[\times]0, B[)$ de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} U_{kl}(x, y)$$

où

$$c_{kl} = \frac{4}{AB}\int_0^A dx \int_0^B dy U(x, y) U_{kl}(x, y)$$

Pour cela, considérons la fonction $U'(x, y)$ définie sur $[-A, A]\times[-B, B]$ en posant

$$\begin{array}{lclcc} U'(x,y) & = & -U(-x,y) & \text{sur} &]-A,0[\times[0,B[\\ U'(x,y) & = & U(x,y) & \text{sur} & [0,A[\times[0,B[\\ U'(x,y) & = & U(-x,-y) & \text{sur} &]-A,0[\times]-B,0[\\ U'(x,y) & = & -U(x,-y) & \text{sur} & [0,A[\times]-B,0[\end{array}$$

et étendons la en une fonction U" de classe C_∞ périodique de période $2A$ selon x et $2B$ selon y. Cela est licite puisque U s'annule avec ses dérivées paires sur Γ. Le théorème de Fourier appliqué à U" et combiné aux relations d'antisymétrie

$$U"(-x, y) = U"(x, -y) = -U"(x, y)$$

montre que cette fonction est limite dans C_∞ de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} \sin(\frac{k\pi x}{A}) \sin(\frac{l\pi y}{B})$$

où

$$\begin{array}{rcl} c_{kl} & = & \frac{1}{AB}\int_{-A}^{A} dx \int_{-B}^{B} dy U"(x, y) \sin(\frac{k\pi x}{A}) \sin(\frac{l\pi y}{B}) \\ & = & \frac{4}{AB}\int_0^A dx \int_0^B dy U"(x, y) \sin(\frac{k\pi x}{A}) \sin(\frac{l\pi y}{B}) \end{array}$$

Pour établir le développement annoncé, il suffit alors de remarquer que $U"(x, y) = U(x, y)$ sur $]0, A[\times]0, B[$.

Considérons maintenant une solution U de classe C_∞ du problème aux valeurs propres

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta U - \lambda U & = & 0 \\ U_{|\Gamma} & = & 0 \end{array}\right.$$

Il est clair qu'une telle solution s'annule avec ses dérivées paires sur Γ et ce qui précède nous permet d'affirmer que

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} U_{kl}$$

Par dérivation sous le signe de sommation, il vient alors

$$\Delta U - \lambda U = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}(-\lambda - \omega_{kl}^2) U_{kl}$$

Ainsi, $c_{kl} = 0$ si $\lambda \neq -\omega_{kl}^2$ et comme l'ensemble $\{(k,l) : \omega_{kl}^2 = -\lambda\}$ est fini, nous pouvons en déduire que l'ensemble des valeurs propres du problème étudié est donné par

$$\Lambda = \{-\omega_{kl}^2 : (k,l) \in \mathbf{N}_0^2\}$$

et que l'espace propre correspondant à une valeur propre $\lambda \in \Lambda$ est donné par l'enveloppe linéaire de l'ensemble

$$\{U_{kl} : \omega_{kl}^2 = -\lambda\}$$

Comme Λ est constitué de nombres réels négatifs, la solution générale de l'équation différentielle

$$D_t^2 V(t) - \lambda V(t) = 0$$

est donnée par

$$V(t) = C \sin(\sqrt{-\lambda} t + \phi)$$

où C est une constante réelle arbitraire et où ϕ est un angle de phase arbitraire. Ce qui précède montre alors que les solutions stationnaires de l'équation des membranes vibrantes sont données par la formule

$$L(x,y,t) = \left(\sum_{\omega_{kl}^2 = \omega^2} c_{kl} U_{kl} \right) \sin(\omega t + \phi)$$

où les c_{kl} sont des constantes arbitraires et où ω est une des pulsations propres ω_{kl}.

A toute pulsation propre ω , on associe l'espace propre $\mathcal{U}_\omega$ correspondant à la valeur propre $-\omega^2$. Une pulsation propre est dite dégénérée si l'on a $\dim(\mathcal{U}_\omega) > 1$.

Les zéros des fonctions propres de pulsation propre ω représentent les lignes de noeuds de la vibration correspondante de la membrane. Dans le cas dégénéré, ces lignes de noeuds peuvent présenter un aspect curieux comme on le voit sur la figure 9.1.

On constatera également sur ce schéma que la forme prise par la membrane au cours de ses oscillations propres est, elle aussi, assez originale.

Figure 9.1: Lignes nodales et graphe de la fonction propre $U_{14} + U_{41}$

Solutions générales — Revenons à présent au problème de départ et considérons donc une fonction $L(x, y, t)$ de classe C_∞ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D_t^2 L - \Delta L & = & 0 \\ L(x,y,t) & = & 0 \quad \text{si } (x,y) \in \Gamma \end{array} \right.$$

Pour chaque $t > 0$ fixé, $L(x, y, t)$ est de classe C_∞ sur $[0, A] \times [0, B]$ et s'annule avec ses dérivées paires sur Γ. Il en résulte que

$$L(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}(t) U_{kl}(x,y)$$

où

$$c_{kl}(t) = \frac{4}{AB} \int_0^A dx \int_0^B dy L(x,y,t) U_{kl}(x,y)$$

De plus, le théorème de dérivation sous le signe d'intégration montre que

$$D_t^s L(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} D_t^s c_{kl}(t) U_{kl}(x,y)$$

Ces relations permettent d'obtenir la suite d'équivalences ci-dessous:

$$\begin{array}{lrcl} & D_t^2 L - \Delta L & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} D_t^2 c_{kl}(t) U_{kl}(x,y) - c_{kl}(t) \Delta U_{kl}(x,y) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & D_t^2 c_{kl}(t) + c_{kl}(t) \omega_{kl}^2 & = & 0 \end{array}$$

De la dernière relation, on déduit que

$$c_{kl}(t) = A_{kl}\cos(\omega_{kl}t) + B_{kl}\sin(\omega_{kl}t)$$

Ainsi, la solution $L(x, y, t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} L(x,y,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} A_{kl}U_{kl}(x,y)\cos(\omega_{kl}t) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} B_{kl}U_{kl}(x,y)\sin(\omega_{kl}t) \end{aligned}$$

Pour conclure, nous allons montrer que les coefficients A_{kl} et B_{kl} sont déterminés par les valeurs de $L(x, y, t)$ et $D_t L(x, y, t)$ pour $t = 0$. En effet, ce qui précède montre que

$$\begin{aligned} L(x,y,t)_{|t=0} &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} A_{kl}U_{kl}(x,y) \\ D_tL(x,y,t)_{|t=0} &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \omega_{kl}B_{kl}U_{kl}(x,y) \end{aligned}$$

et les résultats obtenus sur les séries de fonctions propres montrent que

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \frac{4}{AB}\int_0^A dx \int_0^B dy L(x,y,0)U_{kl}(x,y) \\ B_{kl} &= \frac{4}{AB\omega_{kl}}\int_0^A dx \int_0^B dy D_tL(x,y,t)_{|t=0}U_{kl}(x,y) \end{aligned}$$

Enfin, on vérifie aisément que les formules ci-dessus pour A_{kl} et B_{kl} combinées au développement en série de $L(x, y, t)$ permettent de résoudre le problème de Cauchy pour $t = 0$. □

Exercice 9.7 [*Fonctions de Bessel d'indice entier*]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $e^{ix\sin\varphi}$ est périodique de période 2π sur la droite réelle. Comme elle est de classe C_∞, on sait que le développement de Fourier

$$e^{ix\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)e^{in\varphi}$$

est convergent dans l'espace $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$. Les coefficients $J_n(x)$ de ce développement sont, par définition, les fonctions de Bessel d'indice entier.

On demande de montrer que si $n \geq 0$, alors le développement de Taylor de $J_n(x)$ à l'origine est donné par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k},$$

et que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Solution: Par définition, nous savons que

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin\varphi} e^{ix\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Comme

$$e^{-ix\sin\varphi} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-ix\sin\varphi)^k}{k!}$$

et comme cette série est uniformément absolument convergente pour $\varphi \in [-\pi, \pi]$, il vient

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-ix\sin\varphi)^k}{k!} e^{in\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-ix)^k}{k!} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin\varphi)^k e^{in\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (\sin\varphi)^k &= \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \, \frac{e^{il\varphi} e^{-i\varphi(k-l)}}{2^k i^k} (-1)^{k-l} \\ &= \sum_{l=0}^{k} \frac{C_k^l (-1)^{k-l}}{2^k i^k} e^{i\varphi(2l-k)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin\varphi)^k e^{in\varphi} d\varphi &= \sum_{l=0}^{k} \frac{C_k^l (-1)^{k-l}}{2^k i^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(2l-k+n)} d\varphi \\ &= \sum_{l=0}^{k} \frac{C_k^l (-1)^{k-l}}{2^k i^k} 2\pi \delta_{2l-k+n,0} \end{aligned}$$

et cette intégrale diffère de zéro si et seulement s'il existe un naturel $l \leq k$ tel que $k = 2l + n$ auquel cas sa valeur est

$$\frac{C_k^l}{(2i)^k}(-1)^{k-l}2\pi.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-ix)^{2l+n}}{(2l+n)!}(-1)^{n+l}\,\frac{(2l+n)!(2\pi)}{l!(l+n)!(2i)^{2l+n}} \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2l+n}}{l!(l+n)!}(-1)^l. \end{aligned}$$

Vu ce qui précède, il est clair que

$$J_{-n}(-x) = J_n(x)$$

et le développement ci-dessus montre que

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x),$$

d'où la conclusion. □

Exercice 9.8 [*Mouvement Keplérien*]
Considérons le mouvement d'une planète autour du soleil et négligeons les interactions des autres planètes. L'orbite sera une ellipse d'excentricité $e < 1$. La mécanique céleste nous apprend que ce mouvement est régi par l'équation de Kepler

$$E - e\sin E = M.$$

Rappelons que dans cette relation, M désigne l'anomalie moyenne donnée par la formule

$$M = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}$$

où t_0 est le temps de passage au périhélie et où T est la période du mouvement planétaire encore appelée année tropique. Quant à la grandeur E, il s'agit de l'anomalie excentrique dont la définition est clarifiée par le schéma ci-dessous

Cela étant, on demande de montrer que pour e fixé, la solution $E(e, M)$ de l'équation de Kepler est une fonction de classe C_∞ en M et que dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$E(e, M) = M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ek) \sin kM.$$

Solution: Définissons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la relation

$$f(E) = E - e \sin E.$$

Il est clair que f est de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$D_E f = 1 - e \cos E > 0.$$

Il en résulte que f est strictement croissant et on en déduit l'existence d'une fonction inverse f^{-1} de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$. Comme cette fonction f^{-1} coïncide visiblement avec la solution $E(e, M)$ de l'équation de Kepler, la première question est résolue.

Remarquons maintenant que si

$$E - e \sin E = M,$$

alors

$$(E + 2k\pi) - e \sin(E + 2k\pi) = M + 2k\pi.$$

Ainsi, on a

$$E(e, M + 2k\pi) = E(e, M) + 2k\pi$$

pour tout M et la fonction $g(M) = E(e, M) - M$ est périodique de période 2π. Comme cette fonction est également impaire et de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$, le théorème de

Fourier montre que :

$$g(M) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin kM,$$

la série étant convergente dans C_∞ et les coefficients C_k étant donnés par la formule

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(M) \sin kM dM.$$

Une intégration par partie montre de suite que

$$C_k = \frac{1}{\pi} \left(g(M)\frac{-\cos kM}{k}\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (D_M g)\frac{\cos kM}{k}\, dM.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} (D_M E - 1)\cos kM dM \\ &= \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} D_M E \cos kM dM. \end{aligned}$$

Or $E(e, M)$ définit un changement de variables de classe C^∞ entre $]0, 2\pi[$ et $]0, 2\pi[$, donc on peut calculer C_k par la formule

$$C_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} \cos k(E - e\sin E) dE.$$

Par la définition des fonctions de Bessel d'indice entier, on a :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi - in\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x\sin\varphi - n\varphi) + i\sin(x\sin\varphi - n\varphi))\, d\varphi. \end{aligned}$$

En tenant compte de la parité du premier terme et de l'imparité et du second terme de l'intégrand ci-dessus, on voit que

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\varphi - n\varphi) d\varphi.$$

De cette formule, on déduit directement que

$$C_k = \frac{2}{k} J_k(ek)$$

d'où la conclusion. □

Chapitre 10

Suites orthonormées dans L^2

Exercice 10.1 Le procédé d'orthonormation de Schmidt appliqué dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1,1])$ aux polynômes $1, x, x^2, \ldots$ fournit les polynômes de Legendre.

Solution:

1) — Remarque : Si p_m et p'_m $(m \in \mathbb{N})$ sont deux suites de polynômes à coefficients réels telles que pour tout m, p_m et p'_m soient de degré m et (p_m) (resp. (p'_m)) soit une suite orthonormée dans $\mathrm{L}^2([-1,1])$, alors $p_m = \pm p'_m$ pour tout m.

De fait, pour $m=0$, on a $p_0 =$ constante et $\|p_0\| = 1$; p_0 est donc égal à $\pm 1/\sqrt{2}$. Pour $m = 1$, on a

$$x = \langle x, p_0\rangle\, p_0 + \langle x, p_1\rangle\, p_1 = \langle x, p_1\rangle\, p_1$$

(car l'intervalle $[-1,1]$ est symétrique par rapport à l'origine) et par conséquent,

$$|\langle x, p_1\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Comme p_1 s'écrit aussi

$$p_1 = \langle x, p_1\rangle^{-1} x - \langle x, p_1\rangle^{-1} \langle x, p_0\rangle\, p_0,$$

on en déduit son expression (au signe près).

Procédons par récurrence pour conclure : supposons que les polynômes $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m$ soient déterminés (au signe près). On a

$$x^{m+1} = \left\langle x^{m+1}, p_0\right\rangle p_0 + \left\langle x^{m+1}, p_1\right\rangle p_1 + \cdots + \left\langle x^{m+1}, p_{m+1}\right\rangle p_{m+1},$$

donc

$$\left|\left\langle x^{m+1}, p_{m+1}\right\rangle\right| = (\left\langle x^{m+1}, x^{m+1}\right\rangle - \left\langle x^{m+1}, p_0\right\rangle^2 - \cdots - \left\langle x^{m+1}, p_m\right\rangle^2)^{1/2}.$$

Comme p_{m+1} s'écrit aussi

$$\begin{aligned} p_{m+1} &= \left\langle x^{m+1}, p_{m+1}\right\rangle^{-1} x^{m+1} - \left\langle x^{m+1}, p_{m+1}\right\rangle^{-1} \left\langle x^{m+1}, p_0\right\rangle p_0 - \cdots \\ &\quad - \left\langle x^{m+1}, p_{m+1}\right\rangle^{-1} \left\langle x^{m+1}, p_m\right\rangle p_m, \end{aligned}$$

on en déduit que p_{m+1} est déterminé au signe près.

2) — 1ère démonstration (basée sur la remarque précédente).

Par le procédé d'orthonormation de Schmidt, à partir des polynômes $1, x, x^2, \ldots$, on obtient des polynômes de degré 0,1,2,... orthogonaux et normés. Il suffit dès lors de prouver que les polynômes de Legendre sont orthonormés.

3) — 2ème démonstration. Le procédé d'orthonormation de Schmidt appliqué aux polynômes $1, x, x^2, \ldots$ (baptisés $u_0, u_1, u_2, \ldots$), fournit les fonctions

$$\begin{aligned} u_0^\star &:= 1, \\ u_m^\star &:= u_m - \sum_{k=0}^{m-1} \langle u_m, u_k^\star\rangle \left(\langle u_k^\star, u_k^\star\rangle\right)^{-1} u_k^\star \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\langle x^m, u_k^\star\rangle = 0 \tag{10.1}$$

pour tous m, k tels que $m < k$ (car $u_m = x^m$ est combinaison linéaire de $u_0^\star, u_1^\star, \ldots,$ $u_m^\star$ et car les $u_k^\star$ sont orthogonaux deux à deux par construction).

Cela étant, pour trouver la forme canonique des $u_m^\star$, considérons les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f_0 &:= u_0^\star \\ f_m(x) &:= \int_{-1}^{x} \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} u_m^\star(t)dt \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont en fait des primitives m-ièmes des fonctions $u_m^\star$: on a

$$D_x^m f_m(x) = u_m^\star(x)$$

pour tout m.

De plus, comme $u_m^\star$ est un polynôme de degré m (démonstration par récurrence en se servant de la formule récurrente du procédé de Schmidt), f_m est un polynôme de degré $2m$. Cherchons-en les racines afin d'en trouver une expression.

Soit $m \geq 1$. Comme on a

$$D_x^k f_m(x)|_{x=\pm 1} = 0$$

pour tout $k = 0, \ldots, m-1$ et comme f_m est un polynôme de degré $2m$, on peut écrire

$$f_m(x) = C_m(x^2-1)^m.$$

Il s'ensuit que

$$u_m^\star(x) = D_x^m f_m(x) = C_m D_x^m (x^2-1)^m.$$

Il faut maintenant calculer la norme de $u_m^\star$ afin d'orthonormer la suite. Soit $m \geq 1$. On a

$$\|u_m^\star\|^2 = C_m \int_{-1}^{1} u_m^\star(x) D_x^m (x^2-1)^m dx.$$

Vu la relation (10.1), quand on développe l'expression $D_x^m(x^2-1)^m$ (qui est un polynôme de degré m) et que l'on calcule l'intégrale, le seul terme non nul est le terme correspondant au monôme x^m. Le coefficient de x^m dans le développement de $D_x^m(x^2-1)^m$ est $(2m)!/m!$, d'où l'on tire

$$\|u_m^\star\|^2 = C_m^2 \left[\frac{(2m)!}{m!}\right] \int_{-1}^{1} x^m D_x^m (x^2-1)^m dx.$$

En intégrant successivement m fois par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\|u_m^\star\|^2 &= C_m^2 (2m)!(-1)^m \int_{-1}^{1} (x^2-1)^m dx = C_m^2 (2m)! 2^{2m+1} \mathrm{B}(m+1, m+1) \\ &= C_m^2 (2m+1)^{-1} 2^{2m+1} (m!)^2.\end{aligned}$$

Dès lors, comme $\|u_0^\star\|^2 = 2$, et $\|u_m^\star\| = |C_m|\, 2^m m! \sqrt{\frac{2}{2m+1}}$ (car C_m est réel), on obtient une suite orthonormée $u_m^{\star\star}$ définie par

$$\begin{aligned} u_0^{\star\star} &= \sqrt{2}/2 \\ u_m^{\star\star}(x) &= \pm 2^{-m} (m!)^{-1} \left[\frac{2m+1}{2}\right]^{1/2} D_x^m (x^2-1)^m \quad (m \geq 1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire les polynômes de Legendre si on considère le signe $+$. □

Remarque: En appliquant le procédé d'orthonormation de Schmidt

a) dans $\mathrm{L}^2([0,+\infty])$ aux fonctions $x^m e^{-x}$ $(m = 0, 1, \ldots)$, on obtient les fonctions de Laguerre;

b) dans $\mathrm{L}^2([0,+\infty])$ aux fonctions $x^m e^{-x^2}$ $(m = 0, 1, \ldots)$, on obtient les fonctions d'Hermite.

Exercice 10.2 Désignons par p_m les polynômes de Legendre ($m = 0, \ldots$) et par $p_{l,m}$ les fonctions associées de Legendre, c'est-à-dire les fonctions

$$p_{l,m} = (1-x^2)^{m/2} D_x^m p_l(x)$$

($x \in [-1,1]$; m, l naturels positifs ou nuls tels que $m \leq l$). Alors, dans $\mathrm{L}^2([-1,1])$, on a les relations

$$\langle p_{l,m}, p_{l',m} \rangle = \frac{(m+l)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}$$

pour tous l, l' et m tels que $m \leq \inf(l, l')$.

Solution: Supposons que l'on ait $l < l'$. Désignons par q_{m+l} le polynôme de degré $m+l$ égal à $(1-x^2)^m D_x^m p_l(x)$. Dès lors, on a

$$\langle p_{l,m}, p_{l',m} \rangle = \int_{-1}^{1} q_{m+l}(x) D_x^m p_{l'}(x) dx.$$

Par des intégrations successives par parties, en remarquant que l'on a

$$\langle x^m, p_k \rangle = 0 \tag{10.2}$$

pour $m, k \in \mathbb{N}$ tels que $m < k$, on obtient

$$\langle p_{l,m}, p_{l',m} \rangle = 0.$$

Supposons que $m < l = l'$. Par m intégrations par parties successives, on obtient

$$\langle p_{l,m}, p_{l,m} \rangle = (-1)^m \int_{-1}^{1} D_x^m q_{m+l}(x) p_l(x) dx.$$

Cela étant, comme le coefficient de x^l du polynôme (de degré l) $D_x^m q_{m+l}(x)$ vaut

$$(2l+1)^{1/2} 2^{-l-1/2} (l!)^{-2} (-1)^m (2l)! \frac{(m+l)!}{(l-m)!}$$

et comme on a les relations (10.2), on obtient

$$\langle p_{l,m}, p_{l,m} \rangle = (2l+1)^{1/2} 2^{-l-1/2} (l!)^{-2} (2l)! \frac{(m+l)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{1} x^l p_l(x) dx.$$

En reprenant l'expression du polynôme de Legendre, en intégrant l fois par parties et en faisant appel à la fonction B, on trouve

$$\langle p_{l,m}, p_{l,m} \rangle = \frac{(m+l)!}{(l-m)!}.$$

□

Exercice 10.3 Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ et soit u_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite orthonormée totale dans $\mathrm{L}^2(E)$ pour laquelle il existe $C > 0$ tel que $|u_m| \leq C$ *pp* sur E pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $f \in \mathrm{L}^1(E)$, on a

$$\lim_{m \to +\infty} \int_E f(x) u_m(x) dx = 0.$$

Solution: Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons $A_m := \{x \in E : |f(x)| \leq m \text{ et } |x| \leq m\}$ et $\Phi_m := f\chi_{A_m}$. Alors Φ_m ($m \in \mathbb{N}$) est une suite d'éléments de $\mathrm{L}^1(E) \cap \mathrm{L}^2(E)$ qui converge dans $\mathrm{L}^1(E)$ vers la fonctions f. Cela étant, soit $\epsilon > 0$. D'une part, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f - \Phi_N\|_{\mathrm{L}^1(E)} \leq \frac{\epsilon}{2C}.$$

D'autre part, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\langle \Phi_N, \overline{u}_m \rangle| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

pour tout $m \geq M$. D'où la conclusion, car on a

$$\left| \int_E f u_m dx \right| \leq C \, \|f - \Phi_N\|_{\mathrm{L}^1(E)} + |\langle \Phi_N, \overline{u}_m \rangle|$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. □

Appendice A

Rappel théorique

A.1 Topologie d'un sous-espace

Définition

- Un *ouvert* de $A \subset \mathbb{R}^n$ est une partie de A de la forme $\Omega \cap A$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- Un *fermé* de $A \subset \mathbb{R}^n$ est une partie de A de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exemples

a) L'intervalle $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, 2[$;

b) L'intervalle $]0, 1]$ est un fermé de $]0, 2]$.

A.2 Densité

Définition
Une partie D de $A \subset \mathbb{R}^n$ est *dense* dans A si $A \subset D^-$. Il revient au même de dire que tout point de A est limite d'une suite de points de D.

Proposition Si D est une partie dense de A alors

a) tout fermé de A qui contient D est égal à A;

b) deux fonctions réelles continues f, g sur A vérifient la relation

$$f(x) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} g(x)$$

sur A ssi elles la vérifient sur D.

A.3 Connexité

Définition

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est *connexe* si elle n'admet pas de partition en deux ouverts non vides. Il revient au même d'exiger que A ne contienne aucune partie propre non vide à la fois ouverte et fermée.

Une *composante connexe* de $A \subset \mathbb{R}^n$ est un connexe maximal de A (i.e. un connexe de A égal à tout connexe de A qui le contient).

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est *connexe par arcs* si, pour tous $x, y \in A$, il existe un chemin γ à valeurs dans A d'origine x et d'extrémité y.

Proposition

a) Les composantes connexes de $A \subset \mathbb{R}^n$ forment une partition de A.

b) Tout espace connexe par arcs est connexe mais la réciproque est fausse en général.

c) Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

A.4 Convergence uniforme

Définition Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$ et soient f, f_m $(m \in \mathbb{N})$ des fonctions définies sur E.

Nous dirons que

a) la suite f_m *converge ponctuellement vers* f sur E si

$$\forall x \in E \, \forall \epsilon > 0 \, \exists M > 0 (m \geq M \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon)$$

et nous écrirons alors

$$f_m \underset{E}{\rightarrow} f$$

b) la suite f_m *converge uniformément vers* f sur E si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 (m \geq M, x \in E \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon)$$

et nous écrirons alors

$$f_m \underset{E}{\rightrightarrows} f$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} f_m \underset{E}{\rightarrow} f \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in E \lim_{m \to +\infty} |f_m(x) - f(x)| = 0 \\ f_m \underset{E}{\rightrightarrows} f \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{m \to +\infty} \sup_{x \in E} |f_m(x) - f(x)| = 0 \end{aligned}$$

Critére de Cauchy uniforme

La suite f_m de fonctions définies sur E converge uniformément sur E si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 \quad (m, n \geq M \Rightarrow \sup_{x \in E} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon)$$

Une des motivations de l'introduction de la convergence uniforme est le fait qu'une limite ponctuelle de fonctions continues n'est pas nécessairement continue alors que c'est le cas pour une limite uniforme.

Par exemple, sur $\mathbb{R}$, on a

$$\frac{2}{\pi} \arctan(mx) \underset{\mathbb{R}}{\rightarrow} \operatorname{sgn} x$$

alors que la fonction $\operatorname{sgn} x$ est discontinue. Ce phénomène est visualisé sur le schéma suivant:

A.5 Suite d'éléments de $\mathrm{C}^p(\Omega)$

Proposition Si f_m est une suite de $\mathrm{C}^p(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si

a) la suite $D^\alpha f_m$ converge uniformément sur tout compact de Ω lorsque $|\alpha| = p$

b) la suite $D^\alpha f_m(x)$ converge en un point x de chaque composante connexe de Ω lorsque $|\alpha| < p$

alors il existe une fonction $f \in \mathrm{C}^p(\Omega)$ telle que

$$D^\alpha f_m \underset{K}{\rightrightarrows} D^\alpha f$$

pour tout compact K de Ω lorsque $|\alpha| \leq p$.

Pour tout $f \in \mathrm{C}^0(\Omega)$, posons

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

Cette notation nous permet de déduire du résultat précédent le critère pratique suivant.

Critère de dérivation des séries Soit $f_m \in \mathrm{C}^p(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si les séries numériques

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \|D^\alpha f_m\|_K$$

convergent pour tout compact K de Ω et tout multiindice α tel que $|\alpha| \leq p$, alors il existe un élément $f \in \mathrm{C}^p(\Omega)$ tel que

$$D^\alpha f = \sum_{m=0}^{+\infty} D^\alpha f_m$$

si $|\alpha| \leq p$.

A.6 Théorème de Stone-Weierstrass

Proposition Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout $f \in C_0(K)$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\sup_{x\in K} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon$ (i.e. l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathrm{C}^0(K)$).

Corollaire Si f est une fonction périodique continue de période T sur $\mathbb{R}$ alors pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et tout $\epsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{N}$ et des complexes r_m, s_m $(0 \leq m \leq M)$ tels que

$$\left| f(x) - \sum_{m=0}^{M} (r_m \ \cos(2\pi m \ \frac{x}{T}) + s_m \ \sin(2\pi m \frac{x}{T})) \right| \leq \epsilon, \ \forall x \in K.$$

Bibliographie

[1] Boas R.P. *A Primer of Real Functions*, The Mathematical Association of America (1981).

[2] Courant R.–Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I(1953) II(1962), Interscience Publishers.

[3] Garnir H.G. *Fonctions de Variables Réelles*, Vol. I(1970), II(1965), Vandermeulen.

[4] Garnir H.G., Dewilde M., Schmets J. *Analyse Fonctionnelle*, Vol. I(1968), II(1970), III(1973), Birhäuser.

[5] Jongmans J. *Notions de Topologie Générale*, Cours ronéotypé, Université de Liège.

[6] Schmets J. *Introduction aux espaces fonctionnels*, Cours de 2ème candidature sc. math. & phys., Université de Liège (1989).

[7] Schwartz L. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann (1961).

[8] Schwartz L. *Théorie des Distributions*, Hermann (1966).

[9] Smirnov V. *Cours de Mathématiques Supérieures*, Editions MIR (1972).

[10] Thomson W.T. *Laplace Transformation*, Longmans, Green & Co. (1957).

Table des Matières