Année académique 2010-2011

2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II
Révisions de la matière du 1er quadrimestre, février 2011

Exercice 1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x}, \qquad g(x) = e^{-(x-1)^2}.$$

a) Les fonctions f et g sont-elles dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et/ou $L^\infty(\mathbb{R})$? Si oui, en déterminer alors les normes correspondantes.

b) Même question pour f mais dans $L^1(]0,+\infty[)$, $L^2(]0,+\infty[)$ et $L^\infty(]0,+\infty[)$.

Exercice 2. On donne la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions suivante

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1+m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Déterminer l'ensemble des réels A (ensemble le plus garnd possible) sur lequel cette suite converge ponctuellement, ainsi que sa limite.

b) Étudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les intervalles bornés-fermés (compacts) inclus dans A.

c) Si les éléments de la suite donnée appartiennent à $L^1(A)$, étudier la convergence de cette suite dans $L^1(A)$. Même question avec $L^2(A)$.

Exercice 3. Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions f et g définies par

$$f(x) = e^{-|\pi x - 1|}, \qquad g(x) = \frac{1}{2+x^2}.$$

Exercice 4. Soient les fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x), \quad g(x) = \chi_{[-1,1]}(x), \quad h(x) = x\chi_{[0,+\infty[}(x), \quad k(x) = xe^{-x^2}.$$

a) Montrer que les produits de convolution $f \star g$, $f \star h$ et $g \star k$ sont définis sur $\mathbb{R}$ et donner leurs valeurs en tout point de $\mathbb{R}$.

b) Calculer si possible la transformée de Fourier de f, de k et de $f \star g$.

Exercice 5. Soient a, $b > 0$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}dx.$$

Exercice 6. Soit la fonction impaire f définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0,\pi]$.

a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi,\pi])$. Exprimer la réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum les calculs.

b) En déduire la valeur des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^6}.$$