Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

Exercice 1. Soit $a > 0$. Calculer

$$\mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(e^{ix}e^{-|x|}\right), \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left((1-a|x|)\chi_{[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]}(x)\right), \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(e^{-|x-1|}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{\pm}_{x\to y}\left(\sin(rx)\chi_{[-1,1]}(x)\right).$$

Exercice 2. (a) Calculer (si possible) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ où λ est une constante strictement positive.

(b) Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}.$$

Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$R_a \star R_b = R_{a+b}.$$

(c) De la formule de Parseval, déduire que pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab}\frac{1}{a+b}.$$

Exercice 3. Pour $b > a > 0$ et $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on considère l'équation intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2+a^2}\,dt = \frac{1}{x^2+b^2}.$$

(a) La transformer sous forme d'une équation de convolution et déterminer $\mathcal{F}^- f$.

(b) En déduire f.

Exercice 4. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 5. Soient $a, b > 0$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\,dx.$$

Si en particulier $a > b$, calculer

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\,dx.$$

Exercice 6. En utilisant le théorème du transfert, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\sin(x)\,dx.$$

Exercice 7. Démontrer que, dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, 0 est le seul élément tel que $f \star f = f$.

Exercice 8 (Intégrales de Fresnel)**.** Etablir que

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

pour tout $\lambda > 0$.

Exercice 9. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\mathcal{F}_y^- f\right|^2, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f \star f^s.$$

(b) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

(c) Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

(d) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

Exercice 10. Soit f une fonction réelle, intégrable sur $\mathbb{R}$ et dont la transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\, \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}\, \mathcal{F}_x^- f\, dx\right)$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si on suppose maintenant que

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } t \in]0,\pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

déduire de la relation précédente que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\pi x) + 1}{1 - x^2}\, dx = 0.$$

Exercice 11. Soit une fonction $u = u(x,t)$ ($x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$) de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur $\mathbb{R}$ quel que soit $t \geq 0$. Soit v une constante strictement positive. On suppose que u vérifie l'**équation de la chaleur**

$$D_t\, u(x,t) = v^2 D_x^2\, u(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\, t \geq 0.$$

On pose

$$f(x) = u(x,0), \quad x \in \mathbb{R}$$

et on définit la fonction $F = F(y,t)$ ($y \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$) de telle sorte que, pour t fixé, $F(y,t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x,t)$.

(a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(y,t)$ vérifie

$$D_t\, F(y,t) + v^2 y^2 F(y,t) = 0.$$

(b) En déduire que, pour $y \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$F(y,t) = e^{-v^2 y^2 t}\, \mathcal{F}_y^- f.$$

(c) En déduire finalement que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2v\sqrt{t}y) e^{-y^2}\, dy.$$

Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Exercice 1. Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions f, g et h définies par

$$f(x) = \frac{1}{x}\chi_{]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[}(x), \quad g(x) = e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad h(x) = \mathrm{sign}(x)\frac{\sin(x)}{x}.$$

Exercice 2. Si $a > 0$ établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\sin(a).$$

Exercice 3. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+i}.$$

Déterminer les transformées de Fourier de f et de g.

Exercice 4. Soit $F \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $F = f \star f$ si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $F = \mathcal{F}^{\pm}\, g$.

Séries trigonométriques de Fourier

Exercice 1. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \,]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in \,]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f de $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$.

(b) En déduire la valeur des sommes

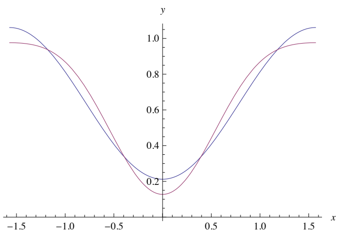
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

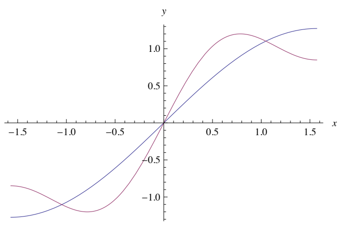
Exercice 2. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$.

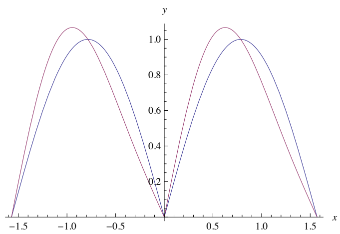
(b) Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$

(c) Parmi les trois graphiques ci-dessous, déterminer celui qui représente les premiers termes du développement de f.







Exercice 3. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x) = x^2 + x$.

(b) Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}.$$

Exercice 4. (a) On se place dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1, 1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g_m(x) = \cos(\pi m x)$.

(b) Dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1, 1])$, on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

Exercice 5 (Formule sommatoire de Poisson)**.** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}^-_{2\pi m} f)\, e^{2i\pi m x}.$$

En déduire que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

L. Simons & F. Bastin – 15 novembre 2011