**2ème année de bachelier en sciences physiques**
**ANALYSE II**
**Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$**

---

**Exercice 1.** Déterminer la transformée de Fourier des fonctions $f$ suivantes ($a > 0$)

a)$f(x) = (1 - a|x|)\chi_{[-1/a,1/a]}(x)$, b)$f(x) = e^{-|x-1|}$, c)$f(x) = e^{2ix}e^{-|3x-1|}$,

d)$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ -e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$, e)$f(x) = x^2 e^{-3|x|}$, f)$f(x) = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x)$.

**Exercice 2.** La transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) et intégrable sur $\mathbb{R}$ est-elle paire, impaire ? Qu'en est-il de la réciproque ?

**Exercice 3.** En utilisant le théorème du transfert, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x) dx.$$

**Exercice 4.** a) Pour tout $\lambda > 0$, calculer (si possible) la transformée de Fourier (positive et négative) de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\lambda|x|}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+4} dx$.

c) Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}.$$

Soient $a,b > 0$. Calculer (si possible)

$$R_a * R_b = R_{a+b}.$$

d) Soient $a$, $b > 0$. Calculer (si possible)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

**Exercice 5.** Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $x \mapsto xf(x)$ soit de carré intégrable, de même que $x \mapsto x\hat{f}(x)$. On pose

$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx.$$

a) Pour $f(x) = e^{-x^2/4}$, montrer que $\Delta_f = \sqrt{2\pi}$.

b) En déduire l'égalité suivante (principe d'incertitude d'Heisenberg dans le cas d'une Gaussienne) :

$$\Delta_f . \Delta_{\hat{f}} = \pi^2$$

pour $f(x) = e^{-x^2/4}$ et en utilisant la notation $\hat{f}$ pour la transformée de Fourier négative de $f$.