Analyse II, partie 1 – Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Exercice 1. Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions f, g et h définies par

$$f(x) = \frac{1}{x}\chi_{]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[}(x), \quad g(x) = e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad h(x) = \mathrm{sign}(x)\frac{\sin(x)}{x}.$$

Exercice 2. Si $a > 0$ établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\sin(a).$$

Exercice 3. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+i}.$$

Déterminer les transformées de Fourier de f et de g.

Exercice 4. Soit $F \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $F = f \star f$ si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $F = \mathcal{F}^{\pm}\, g$.

L. Simons & F. Bastin – 24 novembre 2010.