

Analyse II, partie 1 – Séries trigonométriques de Fourier

Exercice 1. On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f de $L^2([-\pi, \pi])$.
 (b) En déduire la valeur des sommes

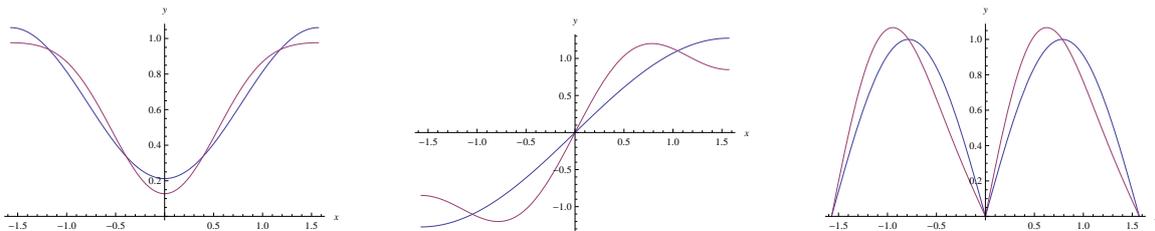
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Exercice 2. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$.

- (b) Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

- (c) Parmi les trois graphiques ci-dessous, déterminer celui qui représente les premiers termes du développement de f .



Exercice 3. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, 2\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x) = x^2 + x$.

- (b) Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}.$$

Exercice 4. (a) On se place dans l'espace $L^2([-1, 1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g_m(x) = \cos(\pi m x)$.

- (b) Dans l'espace $L^2([-1, 1])$, on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1 .

Exercice 5 (Formule sommatoire de Poisson). Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur \mathbb{R} . Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_{2\pi m}^- f) e^{2i\pi m x}.$$

En déduire que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$