

Gibbs... En bref... Au niveau d'un point de discontinuité⁶ de f , $S_M(f)$ subit une forte oscillation, une sorte de "sursaut". Les images laissent soupçonner et le calcul montre effectivement que l'amplitude de ce sursaut tend vers une constante. Précisément, si la fonction a une discontinuité d'amplitude Δ , alors le "saut" en ordonnée des sommes partielles est de l'ordre de 17% de plus que Δ .

Enoncé:

Soit f une fonction périodique et localement dans L^2 , dont les coefficients de Fourier c_m sont tels que $\sup_m m|c_m| < +\infty$, qui possède un nombre fini de points de discontinuité, en chacun desquels elle admet une limite finie à gauche et à droite. Alors, en chacune de ces discontinuités x_0 , il existe $x_M \rightarrow x_0+$ et $y_M \rightarrow x_0-$ tels que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} |S_M(f, x_M) - S_M(f, y_M)| = G\Delta$$

où G est la constante de Gibbs

$$G = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \quad (> 1.17)$$

et où

$$\Delta = |f(x_0+) - f(x_0-)|.$$

Illustration sur le cas de $f(x) = x$.

Soit le développement de $f(x) = x$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, \pi])$, à savoir

$$x = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2mx)}{m}.$$

On pose

$$S_M(f, x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^M \frac{\sin(2mx)}{m}, \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

On a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |S_M(f, x) - x|^2 dx = 0 \quad (\text{convergence dans } L^2([0, \pi]))$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f, x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2mx)}{m} = x \quad \forall x \in]0, \pi[$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f, x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2mx)}{m} = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } x = 0, x = \pi.$$

Le phénomène de Gibbs décrit le comportement des sommes partielles S_M au voisinage des points de discontinuité (de la fonction f périodisée). Ici, les points considérés sont donc les multiples entiers de π .

1) On a

$$\Delta = |f(0+) - f(0-)| = \pi$$

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} S_M\left(f, -\frac{1}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \\ \lim_{M \rightarrow +\infty} S_M\left(f, \frac{1}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

⁶d'un certain type

Démontrons par exemple la seconde égalité sur la limite de S_M . La première s'y ramène immédiatement. On a successivement

$$\begin{aligned} S_M\left(f, \frac{1}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^M \frac{\sin(\pi m/M)}{m} = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{m/M} \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^M \frac{\pi}{M} F(x_m) = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^M (x_m - x_{m-1}) F(x_m) \\ &\rightarrow \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi F(x) dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

en utilisant la définition de l'intégrale (de Riemann) pour le prolongement continu sur $[0, \pi]$ de $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ et le découpage $x_m = \frac{\pi m}{M}$, $m = 0, \dots, M$ de $[0, \pi]$.

2) En utilisant le développement en série de la fonction sin et l'estimation des restes d'une série alternée, on démontre alors que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \geq 1 + \delta$$

avec $\delta = 0,17$. Il s'ensuit l'explication du "saut" quand on s'approche des points de discontinuité:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left| S_M\left(f, -\frac{1}{2M}\right) - S_M\left(f, \frac{1}{2M}\right) \right| = 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \Delta \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \geq \Delta(1 + \delta)$$

De fait, du développement

$$\sin x = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

on tire

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \int_0^\pi x^{2m} dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{(2m+1)!(2m+1)}.$$

Dès lors, quel que soit le naturel strictement positif M , on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx &= 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} \\ &= 2 \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} + 2 \sum_{m=M}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} \\ &\geq 2 \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} - 2 \frac{\pi^{2M}}{(2M+1)!(2M+1)}. \end{aligned}$$

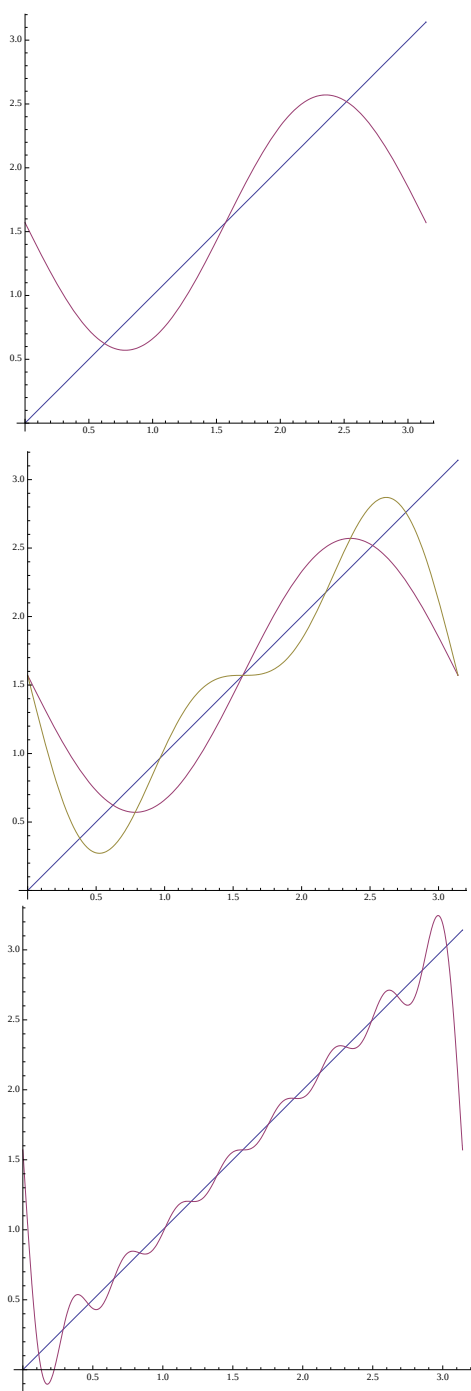
Si on note

$$RG(M) = 2 \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} - 2 \frac{\pi^{2M}}{(2M+1)!(2M+1)},$$

on a

$$\begin{aligned} RG(0) &= 0.90338, RG(1) = 0.57868, RG(2) = 1.17357, RG(3) = 1.16776 \\ RG(4) &= 1.17896, RG(5) = 1.17893, RG(6) = 1.17898, RG(7) = 1.17898 \end{aligned}$$

Quelques graphiques de f et de sommes partielles $S_M(f)$



FB, November 25, 2008

Théorème 2.1 (Théorème d'échantillonnage de Shannon) Soit ν un réel strictement positif. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ et dont le support de la transformée de Fourier (négative) est inclus dans $[-\nu, \nu]$, alors, dans $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$f(x) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=-M}^M f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi}$$

Preuve. Le développement en série trigonométrique de Fourier de $\hat{f}$ dans $L^2([-\nu, \nu])$ donne

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\nu}^{\nu} \hat{f}(u) e^{im\pi u/\nu} du \right) e^{-im\pi y/\nu} \\ &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{F}_{\frac{m\pi}{\nu}}^+ \hat{f} \right) e^{-im\pi y/\nu} \\ &= \frac{\pi}{\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) e^{-im\pi y/\nu}. \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres⁷ et en tenant compte du fait que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} e^{-im\pi y/\nu} dy = \int_{-\nu}^{\nu} e^{ixy} e^{-im\pi y/\nu} dy = 2 \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{x - m\pi/\nu}$$

on obtient

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi}.$$

□

Remarques

En étudiant plus précisément la convergence des séries obtenues, on peut directement obtenir des résultats de convergence autres que ceux en norme L^2 et presque partout.

Ainsi, les séries du type

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(mx), \quad \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin(mx)$$

définissent des fonctions 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$ et continues sur $]0, 2\pi[$ pour autant que la suite a_m ($m \in \mathbb{N}$) (resp. b_m ($m \in \mathbb{N}_0$)) soit une suite de réels décroissante qui converge vers⁸ 0.

Si cette série est le développement d'une fonction régulière⁹, on peut aussi immédiatement obtenir des estimations des coefficients du type $\sup_m |a_m| m^r \leq R$ (resp. $\sup_m |b_m| m^r \leq R$).

Informations au sujet de l'échantillonnage de Nyquist-Shannon par exemple via les pages de wikipedia

FB, November 25, 2008

⁷l'intégrale se fait uniquement sur $[-\nu, \nu]$ étant donné la propriété de support

⁸cela résulte du fait que sous cette hypothèse, la convergence de la série est uniforme dans tout compact du complémentaire des multiples entiers de 2π

⁹c'est-à-dire avec des propriétés de dérivabilité sur $\mathbb{R}$