

1. Examiner l'intégrabilité des fonctions données explicitement ci-dessous,

- $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ sur $]0, 1[$
- $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$

Solution. La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ est continue sur $]0, 1[$ et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x}f(x) = 1.$$

Elle est donc intégrable sur l'intervalle considéré.

La fonction $g: x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}g(x) = 0.$$

Elle est donc intégrable sur l'intervalle considéré.

2. On donne les fonctions f, g et h par

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = e^{-|x-1|}, \quad h(x) = \cos(2\pi x)$$

Déterminer (si possible)

- les normes de f dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire la norme de la convergence uniforme)
- même question pour g et h
- même question pour h mais dans les espaces $L^1([0, 1])$, $L^2([0, 1])$, $L^\infty([0, 1])$
- le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions fh et f .

Solution.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc mesurable) et, après multiplication par x^2 , elle admet 0 comme limite en $+\infty$ et en $-\infty$; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle est également bornée sur $\mathbb{R}$ (par 1). Intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$, elle y est donc également de carré intégrable. On a alors directement

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx = 2, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} dx} = 1, \quad \|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f| = f(0) = 1.$$

- La fonction g possède les mêmes propriétés d'appartenance aux espaces L^p que f (ce n'est qu'une translatée de f); les normes se calculent donc directement aussi et on trouve les même valeurs que pour f .

La fonction h est continue et bornée sur $\mathbb{R}$; elle est donc dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et sa norme vaut 1 (valeur maximale du cosinus). Par contre, elle n'est ni intégrable ni de carré intégrable car on a, pour tout naturel m

$$\int_0^m |\cos(2\pi x)| dx = m \int_0^1 |\cos(2\pi x)| dx, \quad \int_0^m |\cos(2\pi x)|^2 dx = m \int_0^1 |\cos(2\pi x)|^2 dx$$

et ces deux suites convergent vers $+\infty$ si $m \rightarrow +\infty$.

- La fonction h appartenant à $L^\infty(\mathbb{R})$, elle appartient aussi à $L^\infty([0, 1])$ et par suite à $L^1([0, 1])$ et $L^2([0, 1])$. Ses normes sont respectivement égales à

$$\|h\|_1 = \int_0^1 |\cos(2\pi x)| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\|h\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \cos^2(2\pi x) dx} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \|h\|_\infty = 1.$$

- Les fonctions fh et f sont de carrés intégrables dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\langle fh, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi x) e^{-2|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} \cos(\pi x) e^{-x} dx = 2\Re \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\pi)} dx = \frac{2}{1+\pi^2}.$$

3. On définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$.

a) Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ et en déduire la valeur de $\Gamma(\frac{7}{2})$.

b) En considérant que la fonction Γ est deux fois dérivable sous le signe d'intégration, montrer que

$$\left(D\Gamma(x)\right)^2 \leq \Gamma(x) D^2\Gamma(x), \quad \forall x > 0.$$

(Suggestion: utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Solution. a) Utiliser les exercices faits au cours : calcul de $\Gamma(1/2)$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x > 0$. (Les réponses sont respectivement $\sqrt{\pi}$ et $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$)

b) La dérivation sous le signe donne

$$D\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt, \quad D^2\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt.$$

On peut écrire

$$D\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t^{x-1}} e^{-t/2}\right) \left(\sqrt{t^{x-1}} e^{-t/2} \ln t\right) dt,$$

expression dans laquelle les deux fonctions (de t) figurant entre parenthèses appartiennent à $L^2(]0, +\infty[)$; l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans cet espace fournit directement la réponse.

4. Représenter graphiquement l'ensemble suivant dans un repère orthonormé

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + x + y^2 \geq 0\}.$$

Solution. Il s'agit de la partie du plan (bords compris) située entre les branches des hyperboles d'équation $xy = 1$, $xy = -1$ et à l'extérieur du cercle centré en $(-1/2, 0)$ et de rayon $1/2$.

1. Examiner l'intégrabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, en fonction éventuellement du paramètre $\alpha \geq 0$

- $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ sur $]0, 1[$
- $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^{2\alpha}}$ sur $]0, +\infty[$

Solution. Voir l'interrogation des physiciens. Complément pour le second point: l'intégrabilité en 0 résulte du même raisonnement (que que soit α). L'intégrabilité en $+\infty$ résulte aussi du même raisonnement, en tenant compte cependant du paramètre; la fonction est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.

2. On donne les fonctions f, g et h par

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = e^{-|x-1|}, \quad h(x) = \cos(2\pi x)$$

Déterminer (si possible)

- les normes de f dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire la norme de la convergence uniforme)
- même question pour g et h
- même question h mais dans les espaces $L^1([0, 1])$, $L^2([0, 1])$, $L^\infty([0, 1])$
- le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions ifh et if .

Solution. Voir l'interrogation des physiciens (y compris pour la dernière partie car le produit scalaire est le même).

3. On considère $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$.

- Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ et en déduire la valeur de $\Gamma(\frac{7}{2})$.
- En considérant que Γ est deux fois dérivable sous le signe d'intégration, démontrer que

$$\left(D\Gamma(x)\right)^2 \leq \Gamma(x) D^2\Gamma(x), \quad \forall x > 0.$$

- Quel est le domaine de définition de la fonction $\ln \Gamma$?
- Déduire du second point que la fonction $\ln \Gamma$ est convexe sur son domaine de définition.

Solution. Pour les deux premiers points: voir l'interrogation des physiciens.

Pour le troisième: comme $\Gamma(x) > 0$ pour tout x (intégrale d'une fonction continue strictement positive), le domaine de définition demandé est le domaine de définition de Γ , à savoir $]0, +\infty[$.

La convexité résulte du fait que la dérivée seconde est positive sur le domaine (en conséquence du second point).

4. On donne la suite de fonctions f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) suivante

$$f_m(x) = m e^{-m^2 x}, \quad x > 0.$$

- Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $]0, +\infty[$, uniforme sur $]0, +\infty[$ et sur $[r, +\infty[$ (r est un réel strictement positif).
- Etudier la convergence de cette suite dans $L^1([0, +\infty[)$ et dans $L^2([0, +\infty[)$.

Solution. Pour tout $x > 0$, la suite converge vers 0. La convergence est donc ponctuelle vers la fonction 0. Pour tout m , on a

$$\sup_{x>0} |f_m(x) - 0| = \sup_{x\geq 0} m e^{-m^2 x} = m,$$

donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$. Cependant, elle l'est sur $[r, +\infty[$ car

$$\sup_{x \geq r} |f_m(x) - 0| = me^{-m^2 r} \rightarrow 0 \text{ si } m \rightarrow +\infty.$$

Si convergence il y a, c'est nécessairement vers 0. Cela étant, on a

$$\|f_m\|_1 = m \int_0^{+\infty} e^{-m^2 x} dx = \frac{1}{m}, \quad \|f_m\|_2 = m \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2m^2 x} dx} = \frac{m}{\sqrt{2m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

la suite converge donc dans $L^1([0, +\infty[)$ mais pas dans $L^2([0, +\infty[)$.

5. Divers

- **Quand on dit qu'une population de cellules a augmenté de 25%, le nombre de cellules est**
 multiplié par 0.75 ☐ multiplié par 4 ☐ divisé par 1.25 ☐ divisé par 0.8 ☒ aucune des
 réponses précédentes n'est correcte ☐
- **Représenter graphiquement l'ensemble suivant dans un repère orthonormé**

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + x + y^2 \geq 0\}.$$

Solution. Voir l'interrogation des physiciens.