

2ème année de bachelier en mathématique
ANALYSE II
Interrogation du 09 décembre 2008; durée: 1h45

1. 1.1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{ix}e^{-|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et déterminer ensuite sa transformée de Fourier (+) en le réel 2.
1.2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = e^{-a|x-1|}$, $g = \chi_{[-1,1]}$.
- Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Déterminer alors sa transformée de Fourier (+).
- Sachant que la transformée de Fourier de g est la fonction $x \mapsto 2 \frac{\sin x}{x}$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \sin x}{x(a^2 + x^2)} dx$$

pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. On démontre que si f, g sont deux fonctions localement intégrables dans $\mathbb{R}$ et vérifient

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

alors elles sont égales pp. En déduire que si f est une fonction intégrable dont la transformée de Fourier est une fonction de carré intégrable, alors f est aussi de carré intégrable.

3. 3.1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin x|$ dans $L^2\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
3.2) Déterminer la valeur des sommes

$$S_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2 - 1}, \quad S_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

- 3.3) Parmi les trois ensembles de graphiques ci-dessous ((1),(2), (3)), déterminer ceux qui représentent les premiers termes du développement de f .

